Escuela de Matemática de América Latina y el Caribe

EMALCA PERÚ 2008

Curso Básico de Teoría de la Medida

Roger Metzger

SMP IMCA UMALCA

Escuela Matemática de América Latina y el Caribe

EMALCA – PERU 2008

Lima, del 18 al 29 de Febrero

Curso Básico de Teoría de la Medida

Roger Metzger

Sociedad Matemática Peruana

Curso Básico de Teoría de la Medida
Roger Metzger

Impreso en el Perú / Printed in Peru

Primera edición

Esta edición consta de 0250 ejemplares

Lima, febrero 2008

I.S.B.N. 978-9972-242-17-5

Hecho el Depósito Legal en la
Biblioteca Nacional del Perú
N° 2008-01655

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, deseamos expresar aquí nuestro más sincero agradecimiento y estima personal al Profesor Roger Metzger, del Instituto de Matemáticas y Ciencias Afines IMCA, Perú; por haber accedido a escribir la monografía "Curso Básico de Teoría de la Medida" la cual servirá como texto base para el minicurso "Teoría de la Medida" que será dictado en el marco de la Escuela de Matemática de América Latina y el Caribe EMALCA – Perú 2008 a realizarse en el IMCA del 18 al 29 de Febrero.

Queremos aprovechar también éstas líneas para agradecer a las siguientes instituciones nacionales y extranjeras quienes financiaron el evento:

Instituto de Matemática y Ciencias Afines – IMCA
Universidad Nacional de Ingeniería – UNI
Pontificia Universidad Católica – PUCP
Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología – CONCYTEC
International Basic Science Program IBSP – UNESCO
Centre International de Mathématiques Pures et Appliquées - CIMPA

Finalmente, quisiéramos también agradecer a la Unión Matemática de América Latina y el Caribe – UMALCA por haber permitido que la Sociedad Matemática Peruana realize la primera EMALCA del año 2008.

El Comité Organizador
Lima, Febrero del 2008

Contenido

Introducción

El presente librito se preparó para servir como notas del curso Teoría de la Medida que se dictó en el IMCA como parte de la Escuela EMALCA realizada en Lima entre el 18 y 29 de Febrero del 2008.

En el primer capítulo de este libro se desarrolla la medida de Lebesgue en la recta. La noción de medida en general está relacionada con la comparación con algo que se tiene a bien llamar unidad. Desde hace mucho ya sabemos medir intervalos por su longitud, que es equivalente a comparar un intervalo dado con el intervalo unitario $[0, 1]$. La medida de Lebesgue es una generalización de este concepto, en el sentido que nos enseña la manera mas conveniente de "aplicar" esta manera de medir a subconjuntos de la recta que no sean intervalos. Lamentablemente no todos los subconjuntos de la recta están en esta clase. Los conjuntos medibles según Lebesgue serán la mayor clase de subconjuntos que se puedan medir conservando las propiedades de la medida de intervalos. trata el concepto que se tiene de medida

A partir del segundo capítulo desarrollamos la noción de medida como un concepto más general que puede ser aplicado en una diversidad de situaciones.

Se verá en el Capítulo 2 que la propiedad de ser contablemente aditiva es el ingrediente principal en la definición de medida y en las propiedades de la integración a la que estamos acostumbrados desde el Cálculo. En el Capítulo 3 veremos cómo la noción de medida e integración introducen nuevos modos de decir como una sucesión de funciones se acerca a otra. Los teoremas desarrollados en este capítulo son resultados que se usan y aplican en probabilidad y en análisis funcional. En el Capítulo 4 veremos algunas relaciones que pueden existir entre medidas definidas en el mismo espacio. Aquí se desarrolla el importante Teorema de Radón-Nikodym que es fundamental en Teoría Ergódica y para otros resultados como el Teorema de Representación de Riesz. En el Capítulo 5 damos un modo de construir medidas producto en espacios producto. Aquí el modelo es $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y el resultado principal es el que se refiere a integrales iteradas en espacios productos. Este resultado es conocido como el Teorema de Fubini.

Asumimos que el lector ya está familiarizado con las nociones y terminología de conjuntos. Es decir, las operaciones de unión ("$\cup$"), intersección ("$\cap$") y diferencia ("$\setminus$") de conjuntos y con la definición de complemento de un conjunto ("^{c}"). Eventualmente usaremos el símbolo $\biguplus$ para enfatizar que la unión realizada se está haciendo entre conjuntos dos a dos disjuntos.

En el desarrollo de este trabajo usamos las notaciones más comunes posibles. En más de una ocasión será necesario considerar los reales extendidos $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ en los cuales se define las operaciones de suma y multiplicación de la siguiente forma:

$$\begin{array}{lcl} a \pm \infty = \pm\infty \text{ para todo } a \in \mathbb{R} & , & \pm\infty \pm \infty = \pm\infty \\ \pm\infty \cdot 0 = 0 & , & a \cdot \infty = \infty \text{ si } a > 0. \end{array}$$

Y el resto de las operaciones se hace de forma usual, como lo haríamos si fuesen elementos de $\mathbb{R}$. No están definidas las operaciones $\pm\infty + \mp\infty$.

Un hecho que simplifica las cosas en los reales extendidos es que ahí, cualquier sucesión monótona es convergente, pues puede convergir a un número $a \in \mathbb{R}$, a $+\infty$ ó a $-\infty$.

Finalizo agradeciendo la confianza recibida por parte del Prof. Marcelo Viana y el Comité Científico de UMALCA para la realización de este curso.

Roger Metzger Alván

Lima, Febrero 2008

Capítulo 1

Longitud y Medida

1.1 Longitud

La medida de un intervalo se denomina usualmente longitud. Está claro lo que sería la longitud de un intervalo acotado cualquiera, comenzamos pues escribiendo esta definición. La `longitud de un intervalo` con extremos a, b es el número $\ell(I) = b - a$.

Con esto ya sabemos medir intervalos, y entre ellos a los intervalos abiertos. Ahora, ¿cuál es la manera más razonable de definir la longitud de la unión de dos intervalos abiertos disjuntos y acotados?. Es decir ¿cuál es la longitud de $G = (a, b) \cup (c, d)$ donde $b < c$?. Naturalmente se debe tener que $\ell(G) = b - a + d - c$.

La definición anterior sirve para el caso de unión de dos intervalos abiertos disjuntos, pero ¿cómo debería ser la definición cuando se trate de abiertos en general?

Se puede mostrar que un conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}$ se descompone de manera única en una unión disjunta, a lo más numerable, de intervalos abiertos, vea el Lema A.0.1. Por lo tanto definimos para cualquier conjunto abierto $G \subset \mathbb{R}$, la `longitud` de G como

$$\ell(G) = \sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n)\,, \tag{1.1}$$

donde $G = \cup_{n=1}^{\infty} J_n$ es la descomposición (única) de G como unión de una colección disjunta, a lo más numerable de intervalos abiertos.

Una observación importante es que si G es un conjunto abierto acotado entonces $\ell(G) < \infty$ y por lo tanto la suma en (1.1) es una serie absolutamente convergente.

En la siguiente proposición tenemos la propiedad principal de esta manera de definir longitud de abiertos.

Proposición 1.1.1 *Dados dos conjuntos abiertos G_1 y G_2 acotados y disjuntos, se tiene que*

$$\ell(G_1 \uplus G_2) = \ell(G_1) + \ell(G_2) .$$

Demostración. Como los conjuntos $G_1 = \cup_{n=1}^{\infty} I_n$ y $G_2 = \cup_{n=1}^{\infty} J_n$ son acotados y disjuntos, entonces si definimos $K_{2n} = I_n$ y $K_{2n-1} = J_n$ tendremos que $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una unión numerable de intervalos acotados disjuntos dos a dos y además $G_1 \uplus G_2 = \biguplus_{n=1}^{\infty} K_n$ de modo que

$$\ell(G_1 \uplus G_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \ell(K_n) ,$$

y como la suma es absolutamente convergente, podemos reordenar términos y obtenemos

$$\ell(G_1 \uplus G_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) ,$$

que es lo que queríamos demostrar. □

Observación 1.1.1 Otras propiedades importantes de la longitud de un abierto acotado son las siguientes:

1. El vacío es considerado como el intervalo abierto (a, a). Por lo tanto la longitud del conjunto vacío es cero.

2. Si G_1 y G_2 son dos conjunto abierto y acotados, y $G_1 \subset G_2$, se tiene $\ell(G_1) \leq \ell(G_2)$.

3. Si G es un conjunto abierto y acotado y $x_0 \in \mathbb{R}$, se tiene que $G \oplus x_0$ es un conjunto abierto y acotado, y $\ell(G \oplus x_0) = \ell(G)$.

Para la longitud de un conjunto abierto cualquiera G (no necesariamente acotado), escoja una sucesión de intervalos abiertos y acotados $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $I_n \subset I_{n+1}$ y $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = \mathbb{R}$. Esta última condición se escribe como $I_n \nearrow \mathbb{R}$ o en palabras, que la sucesión I_n crece hasta $\mathbb{R}$.

Definimos entonces la longitud de G como

$$\ell(G) = \lim_{n\to\infty} \ell(G \cap I_n)\,.$$

El siguiente lema nos dice que la definición anterior no depende de la sucesión de intervalos escogida. Y también que la longitud de un intervalo abierto existe como número real extendido.

Lema 1.1.1 *Sean G un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$ y $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de intervalos abiertos acotados, tales que $J_n \subset J_{n+1}$, $I_n \subset I_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n = \mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\,.$$

En este caso se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \ell(G \cap J_n) = \lim_{n\to\infty} \ell(G \cap I_n)\,.$$

Demostración. Como $J_n \subset J_{n+1}$ son conjuntos abiertos, se tiene que $\ell(G \cap J_n) \le \ell(G \cap J_{n+1})$ para todo $n \in \mathbb{N}$ de modo que $\lim_{n\to\infty} \ell(G \cap J_n)$ existe como número real extendido y lo mismo vale para $\lim_{n\to\infty} \ell(G \cap I_n)$.

Como para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto $G \cap J_n$ es abierto y acotado, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $G \cap J_n \subset G \cap I_k$ para todo $k > K$ pues los conjuntos I_k son intervalos cada vez más grandes (crecen hasta $\mathbb{R}$).

Tenemos entonces $\ell(G \cap J_n) \le \ell(G \cap I_k)$ para todo $k > K$, por lo tanto

$$\ell(G \cap J_n) \le \lim_{k\to\infty} \ell(G \cap I_k)$$

y como esta última desigualdad vale para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \ell(G \cap J_n) \le \lim_{n=1} \ell(G \cap I_n)\,.$$

De igual manera se obtiene la desigualdad contraria y el lema está probado. $\square$

Observación 1.1.2 Algunas propiedades que vienen directamente del Lema 1.1.1 y de la definición son:

1. Si G es un conjunto abierto acotado, las dos definiciones de longitud para abiertos que hemos visto coinciden.
2. Si $G_1 \subset G_2$ son dos conjuntos abiertos entonces $\ell(G_1) \leq \ell(G_2)$.
3. Un intervalo no acotado G puede tener medida infinita ($\ell(G) = \infty$), como en el caso en que $G = (0, \infty)$; o puede tener medida finita ($\ell(G) < \infty$), como en el caso en que $G = \cup_{n=1}^{\infty}(n - \frac{1}{2n^2}, n + \frac{1}{2n^2})$ que tiene longitud $\ell(G) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$.
4. Si G es un conjunto abierto de $\mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathbb{R}$ entonces $\ell(G \oplus x_0) = \ell(G)$.

Lema 1.1.2 *Si el conjunto $G \subset \mathbb{R}$ es abierto e I es un intervalo abierto y acotado, tenemos que:*

$$\ell(G \cup I) \leq \ell(G) + \ell(I)\,.$$

Demostración. Denotemos $I = (a, b)$, con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$. Supongamos primero que G es abierto y acotado. En ese caso tenemos que $G = \biguplus_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$, con $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ y $a_n < b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ahora bien, si $G \cap I = \emptyset$, entonces $G \cup I = \biguplus_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n) \uplus I$, de modo que por la definición de longitud se tiene

$$\ell(G \cup I) = \sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) + b - a = \ell(G) + \ell(I),$$

y en este caso el lema está probado.

Si $G \subset I$ o $I \subset G$, es obvio que $\ell(G \cup I) \leq \ell(G) + \ell(I)$. Por lo tanto solo queda hacer la demostración para el caso en que $G \cap I \neq \emptyset$ $I \not\subset G$, y $G \not\subset I$.

Supongamos entonces que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(a_{n_0}, b_{n_0}) \cap I \neq \emptyset$, $I \not\subset (a_{n_0}, b_{n_0})$.

Hay tres casos posibles:

(i) $a_{n_0} \leq a < b_{n_0} < b$.

(ii) $a < a_{n_0} < b_{n_0} \leq b$.

(iii) $a < a_{n_0} < b \leq b_{n_0}$.

Demostraremos solamente el primer caso, pues los demás son similares y se deja como ejercicio al lector.

Considere $B = \{n \in \mathbb{N} \ : \ (a_n, b_n) \cap I \neq \emptyset, n \neq n_0\}$. Entonces para cada $n \in B$ se tiene que $b_{n_0} \leq a_n$ en cualquier otro caso se tendría que $(a_n, b_n) \cap (a_{n_0}, b_{n_0}) \neq \emptyset$.

Luego, si $B = \emptyset$, entonces

$$G \cup I = \left[\biguplus_{\substack{n=1 \\ n \neq n_0}}^{\infty} (a_n, b_n) \right] \uplus (a_{n_0}, b),$$

que es una unión a lo sumo numerable de conjuntos dos a dos disjuntos. Luego, por definición se tiene que:

$$\begin{aligned} \ell(G \cup I) &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq n_0}}^{\infty} (b_n - a_n) + b - a_{n_0} \leq \\ &\leq \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq n_0}}^{\infty} (b_n - a_n) + (b - a) + (b_{n_0} - a_{n_0}) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) + (b - a) = \ell(G) + \ell(I). \end{aligned}$$

Si $B \neq \emptyset$, haga $c = \sup[\{b_n \ : \ n \in B\} \cup \{b\}]$. Ahora, si denotamos $B_1 = B \cup \{n_0\}$, se tiene:

$$G \cup I = \left[\bigcup_{\substack{n=1 \\ n \notin B_1}}^{\infty} (a_n, b_n) \right] \cup (a_{n_0}, c),$$

que también es una unión disjunta y a lo más numerable de intervalos abiertos, y por lo tanto:

$$\ell(G \cup I) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq n_0}}^{\infty} (b_n - a_n) + c - a_{n_0},$$

y similarmente al proceso anterior es fácil ver que

$$\ell(G \cup I) \leq \ell(G) + \ell(I)\,.$$

Finalmente para el caso en que G sea un abierto no acotado sea $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de intervalos abiertos y acotados que crece a $\mathbb{R}$. Luego

$$\ell(G \cup I) \cap J_n) = \ell((G \cap J_n) \cup (I \cap J_n)) \leq \ell((G \cap J_n)) + \ell((I \cap J_n))$$

pues $G \cap J_n$ es un conjunto abierto y acotado y cae en el caso ya desarrollado, puesto que $I \cap J_n$ también es un intervalo abierto y acotado. El lema queda demostrado tomando límites y usando la definición de longitud de conjuntos abiertos en este caso. □

Corolario 1.1.1 *Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\{I_k\}_{k=1}^{n}$ una familia finita de intervalos abiertos y acotados. Entonces*

$$\ell\left(\bigcup_{k=1}^{n} I_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \ell(I_k)\,.$$

El resultado del lema anterior puede ser generalizado para una unión cualquiera de conjuntos abiertos.

Teorema 1.1.1 *Sean $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos abiertos de $\mathbb{R}$. Entonces*

$$\ell\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \ell(G_n)\,.$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que todos los G_n son no vacíos. Haga $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ y supongamos que G sea acotado. Para el caso de G no acotado se concluye como en el teorema anterior.

Entonces tenemos que G es abierto y acotado y por lo tanto $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ donde $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de intervalos disjuntos abiertos y acotados. Similarmente para cada n, $G_n = \biguplus_{n=1}^{\infty} I_r^n$, con los I_r^n intervalos abiertos disjuntos y acotados.

Tome $\varepsilon > 0$. Como $\ell(G) < \infty$ sigue que $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) < \infty$ y por lo tanto, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \ell(J_n) < \varepsilon/2\,. \tag{1.2}$$

Para cada J_n tome K_n un intervalo cerrado (esto hace que $\bar{K_n}$ sea compacto) tal que $\ell(J_n) < \ell(K_n) - \frac{\varepsilon}{2N}$ y si juntamos esta relación a (1.2) tenemos

$$\ell(G) < \sum_{n=1}^{N} \ell(J_n) + \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{n=1}^{N} \ell(K_n) + \varepsilon\,. \tag{1.3}$$

Como los $\{I_r^n\}$ son abiertos y cubren $\bigcup_{n=1}^{N} \bar{K_n}$ que es compacto, existe un conjunto finito $\{I_{r_1}^{n_1}, \ldots, I_{r_s}^{n_s}\}$ que lo sigue cubriendo y por lo tanto también a $\bigcup_{n=1}^{N} K_n$, es decir

$$\bigcup_{n=1}^{N} K_n \subset \bigcup_{n=1}^{N} \bar{K_n} \subset I_{r_1}^{n_1} \cup \cdots \cup I_{r_s}^{n_s}. \tag{1.4}$$

Tenemos entonces que

$$\sum_{n=1}^{N} \ell(K_n) \le \ell(I_{r_1}^{n_1} \cup \cdots \cup I_{r_s}^{n_s}) \le \sum_{j=1}^{s} \ell(I_{r_j}^{n_j}), \tag{1.5}$$

donde la última desigualdad se obtiene por el corolario del teorema anterior. De ahí $\sum_{n=1}^{N} \ell(K_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} \ell(G_n)$ que junto con (1.3) nos da

$$\ell(G) < \sum_{n=1}^{N} \ell(K_n) + \varepsilon \le \sum_{n=1}^{\infty} \ell(G_n) + \varepsilon\,. \tag{1.6}$$

Como esta ecuación vale para todo $\varepsilon > 0$ el teorema está probado. □

Teorema 1.1.2 *Sean G_1 y G_2 dos subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}$. En este caso*

$$\ell(G_1) + \ell(G_2) = \ell(G_1 \cup G_2) + \ell(G_1 \cap G_2)\,. \tag{1.7}$$

Demostración. Como primer paso haremos la demostración del teorema en el caso en que G_1 es un intervalo acotado y G_2 es acotado y unión de un número finito de intervalos (abiertos acotados y disjuntos).

Estamos afirmando entonces que si $G_1 = (a,b)$ y $G_2 = \biguplus_{i=1}^{n} I_i$ entonces (1.7) vale para cualquier colección finita de intervalos $\{I_i\}_{i=1}^{n}$ disjuntos dos a dos.

Demostraremos esta afirmación por inducción en n. Para $n = 1$, es decir si $G_1 = (a,b)$ y $G_2 = (c,d)$, el resultado es obvio. Suponga que la afirmación vale para n, mostraremos ahora que vale para $n+1$.

Se tiene entonces que $G_2 = \biguplus_{i=1}^{n+1} I_i$ y hacemos $I = (a,b) = G_1$.

Si $I \cap G_2 = \emptyset$ entonces, de la definición de longitud, se tiene

$$\ell(I \cup G_2) = \ell(I) + \sum_{i=1}^{n+1} I_i = \ell(I) + \ell(G_2)$$

Si $I \cap G_2 \neq \emptyset$, escribimos primero $G_2 = I_1 \cup G_2^{'}$, donde $G_2^{'} = \bigcup_{i=2}^{n+1}$, de modo que

$$\ell(I) + \ell(G_2^{'}) + \ell(I_1) = \ell(I) + \ell(G_2)\,. \tag{1.8}$$

Sin pérdida de generalidad se puede suponer que I intersecta a I_1. (De no ser así se re-enumeran los I_i de modo que I_1 sea un intervalo tal que $I \cap I_j \neq \emptyset$.)

Si $I \cap I_1 \neq \emptyset$ se tiene que $I \cup I_1$ es un intervalo abierto y acotado, y por la hipótesis de inducción

$$\begin{aligned} \ell(I) + \ell(G_2^{'}) + \ell(I_1) &= \ell(I \cup I_1) + \ell(I \cap I_1) + \ell(G_2^{'}) \\ &= \ell(I \cup I_1 \cup G_2^{'}) + \ell((I \cup I_1) \cap G_2^{'}) + \ell(I \cap I_1) \\ &= \ell(I \cup G_2) + \ell(I \cap G_2^{'}) + \ell(I \cap I_1) \end{aligned} \tag{1.9}$$

Pero como $G_2 \cap I = \bigcup_{i=1}^{n+1} (I \cap I_i)$, los últimos dos sumandos de la ecuación (1.9) nos dan $\ell(G_2 \cap I)$, de modo que obtenemos

$$\ell(I) + \ell(G_2) = \ell(I) + \ell(G_2^{'}) + \ell(I_1) = \ell(I \cup G_2) + \ell(G_2 \cap I)$$

con lo que hemos demostrado el teorema en el caso en que $G_1 = I$ y $G_2 = \biguplus_{i=1}^{n} I_i$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

De aquí es fácil ver que el teorema también vale en el caso en que $G_1 = \biguplus_{j=1}^{n_1} J_j$ y $G_2 = \biguplus_{i=1}^{n_2} I_i$ para cualesquiera $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$.

Mostremos ahora que el teorema vale para $G_1 = \biguplus_{j=1}^{\infty} J_j$, y $G_2 = \biguplus_{i=1}^{\infty} I_i$, conjuntos abiertos arbitrarios pero acotados.

Para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} \ell(J_j) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{y} \quad \sum_{i=N+1}^{\infty} \ell(I_i) < \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

Defina $\tilde{G}_1 = \biguplus_{j=1}^{N} J_j$, $\hat{G}_1 = \biguplus_{j=N+1}^{\infty} J_j$, y de la misma manera $\tilde{G}_2 = \biguplus_{i=1}^{N} I_i$, $\hat{G}_2 = \biguplus_{i=N+1}^{\infty} I_i$. Entonces para $i = 1, 2$ se tiene

$$\ell(G_i) = \ell(\tilde{G}_i) + \ell(\hat{G}_i), \quad \text{y} \quad \ell(\hat{G}_i) < \varepsilon/2.$$

De la primera parte tenemos que

$$\ell(\tilde{G}_1) + \ell(\tilde{G}_2) = \ell(\tilde{G}_1 \cup \tilde{G}_2) + \ell(\tilde{G}_1 \cap \tilde{G}_2)$$

y como $\tilde{G}_1 \cup \tilde{G}_2 \subset G_1 \cup G_2$ y $\tilde{G}_1 \cap \tilde{G}_2 \subset G_1 \cap G_2$ la igualdad anterior se convierte en

$$\ell(G_1) + \ell(G_2) \leq \ell(G_1 \cup \ G_2) + \ell(G_1 \cap G_2). \tag{1.10}$$

Por otro lado se cumple que

$$\ell(G_1) + \ell(G_2) = \ell(\tilde{G}_1) + \ell(\tilde{G}_2) + \ell(\hat{G}_1) + \ell(\hat{G}_2) < 2\varepsilon$$

para todo $\varepsilon > 0$, que junto con (1.10) nos da

$$\ell(G_1) + \ell(G_2) \leq \ell(G_1 \cup G_2) + \ell(G_1 \cap G_2)\,.$$

También

$$G_1 \cap G_2 = (\tilde{G}_1 \cup \hat{G}_2) \bigcap (\tilde{G}_2 \cup \hat{G}_2) \subset (\tilde{G}_1 \cap \tilde{G}_2) \bigcup (\hat{G}_1 \cup \hat{G}_2).$$

de modo que

$$\ell(G_1 \cap G_2) \leq \ell((\tilde{G}_1 \cap \tilde{G}_2) \cup \hat{G}_1 \cup \hat{G}_2) \leq \ell(\tilde{G}_1 \cap \tilde{G}_2) + 2\varepsilon,$$

y por lo tanto tenemos

$$\begin{aligned}
\ell(G_1) + \ell(G_2) &\geq \ell(\tilde{G}_1) + \ell(\tilde{G}_2) \\
&\geq \ell(\tilde{G}_1 \cup \tilde{G}_1) + \ell(\tilde{G}_1 \cap \tilde{G}_2) \\
&\geq \ell(\tilde{G}_1 \cup \tilde{G}_2) + (\ell(G_1 \cup G_2) - 2\varepsilon) \\
&\geq (\ell(G_1 \cup G_2) - 2\varepsilon) + (\ell(G_1 \cup G_2) - 2\varepsilon)
\end{aligned}$$

y como estas desigualdades valen para todo $\varepsilon > 0$ tenemos

$$\ell(G_1) + \ell(G_2) \geq \ell(G_1 \cup G_2) + \ell(G_1 \cup G_2)$$

y que junto con (1.10) nos da la igualdad (1.7) para G_1 y G_2 abiertos acotados.

Para el caso cuando G_1 y G_2 son abiertos no acotados se usa la definición de longitud en este caso. □

1.2 Medida Exterior

A continuación definimos la función $m^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$, llamada medida exterior y estudiaremos algunas de sus propiedades.

Sea $E \subset P(\mathbb{R})$. La `medida exterior` de E, $m^*(E)$, se define por el número real extendido:

$$m^*(E) = \inf\{\ell(G) \;:\; G \subset \mathbb{R} \text{ es abierto y } E \subset G\}\,.$$

Nuevamente, ésta no es la medida buscada, pero de ella se sacarán la mayor parte de las propiedades que queremos, solo habrá que pedir una propiedad más para que se convierta en la medida que estamos buscando.

Observación 1.2.1 Presentamos algunas propiedades no muy difíciles de demostrar de la medida exterior.

1. Es inmediato que, si $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ es acotado, entonces $m^*(E) < \infty$.
2. Si E_1 y $E_2 \in P(\mathbb{R})$ y $E_1 \subset E_2$, entonces $m^*(E_1) \leq m^*(E_2)$.
3. Si $E \in P(\mathbb{R})$ es abierto, entonces $m^*(E) = \ell(E)$.
4. Si $E \in P(\mathbb{R})$ y $x_0 \in E$, entonces $m^*(E \oplus x_0) = m^*(E)$.

Proposición 1.2.1 *Si E_1 y E_2 son subconjuntos de $\mathbb{R}$, se tiene,*

$$m^*(E_1) + m^*(E_2) \geq m^*(E_1 \cup E_2) + m^*(E_1 \cap E_2)\,. \tag{1.11}$$

Demostración. Si $m(E_1) = \infty$ o $m(E_2) = \infty$, la proposición se satisface trivialmente. Suponga entonces, que tanto E_1 como E_2 tienen medida finita.

Dado $\varepsilon > 0$, por la definición de medida exterior, existen conjuntos abiertos G_1 y G_2 con $E_1 \subset G_1$ y $E_2 \subset G_2$ y tal que

$$m^*(E_i) + \frac{\varepsilon}{2} > \ell(G_i) \quad \text{para } i = 1, 2.$$

Sumando estas desigualdades tenemos

$$m^*(E_1) + m^*(E_2) + \varepsilon > \ell(G_1) + \ell(G_2) = \ell(G_1 \cap G_2) + \ell(G_1 \cup G_2).$$

Pero $E_1 \cup E_2 \subset G_1 \cup G_2$ y $E_1 \cap E_2 \subset G_1 \cap G_2$, de modo que por las propiedades (2) y (3) de la medida exterior tenemos

$$m^*(E_1) + m^*(E_2) + \varepsilon > m^*(G_1 \cap G_2) + m^*(G_1 \cup G_2)$$

que vale para todo $\varepsilon > 0$ y por lo tanto implica la ecuación 1.11. □

Proposición 1.2.2 *Sea $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de $\mathbb{R}$. Entonces:*

$$m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n)\,.$$

Demostración. Si para algún $n \in \mathbb{N}$, $m^*(E_n) = \infty$, la proposición se cumple trivialmente. Suponga entonces que para todo $n \in \mathbb{N}$, E_n tiene medida finita.

Por lo tanto dado $\varepsilon > 0$ podemos obtener, para cada $n \in \mathbb{N}$, un conjunto abierto G_n con $E_n \subset G_n$ y $m^*(E_n) < \ell(G_n) - \frac{\varepsilon}{2^n}$.

Como $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ tenemos, usando el Teorema 1.1.1, que $m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n) = \ell(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n)$, donde la última igualdad se da debido a que la unión de los G_n es un conjunto abierto. □

1.3 Conjuntos Medibles

La medida exterior tiene la ventaja de estar definida para cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$, pero no satisface $m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B)$ para conjuntos A y B disjuntos, lo que sería deseable para una "medida"como ya hemos mencionado antes. Es por eso que para obtener la propiedad que estamos buscando restringiremos la función m^* a una familia $\mathcal{L}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}$ que satisfagan lo que deseamos, más aún la función así obtenida será contablemente aditiva. Se dice que una función definida sobre subconjuntos de $\mathbb{R}$ es `contablemente aditiva` si para toda sucesión $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ de conjuntos dos a dos disjuntos se tiene que $m^*(\biguplus_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n)$, que es precisamente la propiedad que hace funcionar la teoría de la integración, como se podrá percibir posteriormente.

Sea m^* la medida exterior definida en los subconjuntos de $\mathbb{R}$. Un conjunto $E \subset \mathbb{R}$ satisface la `condición de Caratheodory` si se verifica la igualdad siguiente

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) \tag{1.12}$$

para todo $A \subset \mathbb{R}$.

Los conjuntos que satisfacen la condición de Caratheodory también son llamados medibles, y a la clase conjuntos Lebesgue medibles la denotaremos por

$$\mathcal{L} = \{E \subset \mathbb{R} \ : \ E \text{ es Lebesgue medible}\}.$$

Lema 1.3.1 *Un conjunto E es medible si y solamente si para todo A con $m^*(A) < \infty$ se tiene*

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^+(A \cap E^c) \tag{1.13}$$

Demostración. Que cuando E es medible se implica la condición (1.13) es obvio.

Para la segunda implicación, como $A \cap E$ y $A \cap E^c$ son disjuntos y $(A \cap E) \cup (A \cap E^c) = A$, siempre se tiene que $m^*(A) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$. La condición de Caratheodory es trivial en el caso $m^*(A) = \infty$ y para que se cumpla solo falta ver que $m^*(A) < \infty$ implica que $m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$, que es la condición que se pide en (1.13). $\square$

Teorema 1.3.1 *La colección $\mathcal{L}$ (de subconjuntos medibles de $\mathbb{R}$) satisface:*

(i) $\emptyset \in \mathcal{L}$, *y* $\mathbb{R} \in \mathcal{L}$.

(ii) *Si* $E \in \mathcal{L}$ *entonces* $E^c \in \mathcal{L}$.

(iii) *Si* $\{E_n\}$ *son subconjuntos de* $\mathcal{L}$ *entonces* $\cup E_n \in \mathcal{L}$.

Demostración. La parte (i) es fácil puesto que se cumple la siguiente igualdad para todo $A \subset \mathbb{R}$

$$m^*(A) = m^*(A \cap \emptyset) + m^*(A \cap \emptyset^c) = m^*(A \cap \mathbb{R}) + m^*(A \cap X^c)\,.$$

Para la parte (ii) basta observar que la condición (1.12) es simétrica con respecto a E y E^c.

Para la parte (iii) lo haremos por partes como anteriormente. Primero mostraremos que si A y B están en $\mathcal{L}$ entonces $E \cap F$ están en $\mathcal{L}$.

Sean, entonces dos conjuntos medibles E y F.

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^+(A \cap E^c) \text{ para todo } A \in \mathcal{L}$$

y de ahí

$$m^*(A \cap E) = m^*(A \cap E \cap F) + m^*(A \cap E \cap F^c) \text{ para todo } A \in \mathcal{L}$$

usando $A \cap E$ en el lugar de A en la ecuación anterior. Es decir

$$m^*(A) = m^*(A \cap E \cap F) + m^*(A \cap E^c) + m^*(A \cap E \cap F^c),$$

y usando otra vez que E es medible

$$\begin{aligned} m^*(A \cap (E \cap F)^c) &= m^*(A \cap (E \cap F)^c \cap E) + \\ &\qquad + m^*(A \cap (E \cap F)^c \cap E^c) \\ &= m^*(A \cap F^c \cap E) + m^*(A \cap E^c)\,. \end{aligned}$$

Esta última relación se puede usar en la anterior y se obtiene

$$\begin{aligned} m^*(A) &= m^*(A \cap E \cap F) + m^*(A \cap E^c) + \\ &\qquad + m^*(A \cap (E \cap F)^c) - m^*(A \cap E^c) \\ &= m^*(A \cap (E \cap F)) + m^*(A \cap (E \cap F)^c)\,. \end{aligned}$$

Hemos mostrado entonces que la intersección de dos conjuntos medibles es medible. A su vez, esto implica que la unión de dos conjuntos medibles cualesquiera es medible, usando la parte (ii) sobre los complementos.

También se tiene, tomando E y F medibles disjuntos, que

$$\begin{aligned} m^*(A \cap (A \cup F)) &= m^*(A \cap (E \cup F) \cap E) + \\ &\qquad + m^*(A \cap (E \cup F) \cap E^c) \\ &= m^*(A \cap E) + m^*(A \cap F) \end{aligned}$$

y por inducción que $m^*(A \cap E_1 \cap \cdots \cap E_n) = \sum_{i=1}^n m^*(A \cap E_i)$ si los A_i son conjuntos dos a dos disjuntos.

Ahora bien, dada una familia numerable de conjuntos $\{E_n\}$ medibles, se puede formar una nueva sucesión de conjuntos dos a dos disjuntos, de la siguiente manera

$$F_1 = E_1, \quad F_i = E_i \setminus E_{i-1} \text{ para todo } i > 1$$

de modo que los F_i son conjuntos dos a dos disjuntos,

Entonces para probar la parte (iii) basta mostrarla para una familia de conjuntos dos a dos disjuntos. Sea, pues, $\{E_n\}$ una tal sucesión y haga $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ y $F_n = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$. Ya vimos que los F_n son medibles para todo $n \in \mathbb{N}$ y además si $A \subset \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} m^*(A) &= m^*(A \cap F_n) + m^*(A \cap F_n^c) \\ &= m^*(\bigcup_{k=1}^{n} A \cap E_k) + m^*(A \cap F_n^c) \\ &= \sum_{k=1}^{n} m^*(A \cap E_k) + m^*(A \cap F_n^c) \end{aligned}$$

como $F_n \subset E$ se tiene que $A \cap F_n^c \supset A \cap E^c$ por lo tanto

$$m^*(A) \geq \sum_{k=1}^{n} m^*(A \cap E_k) + m^*(A \cap E)$$

y como esta desigualdad vale para todo $n \in \mathbb{N}$, también se tiene

$$m^*(A) \geq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A \cap E_k) + m^*(A \cap E)\,. \tag{1.14}$$

Pero por la subaditividad de m^* también vale

$$m^*(A \cap E) = m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} A \cap E_k) \geq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A \cap E_k) \tag{1.15}$$

es decir

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$$

con lo que queda mostrado la parte (iii). $\square$

Teorema 1.3.2 *La restricción de m^* a $\mathcal{L}$ satisface*

(i) $m^*(\emptyset) = 0$

(ii) $0 \leq m^*(E) \leq \infty$ *para todo* $E \in \mathcal{L}$.

(iii) *Si* $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es una familia numerable de subconjuntos de* $\mathcal{L}$ *dos a dos disjuntos, entonces*

$$m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n)\,.$$

Demostración. Las partes (i) y (iii) son propiedades de m^* ya vistas, y en la demostración del teorema anterior se mostró las desigualdades (1.14) y (1.15), para todo $A \subset \mathbb{R}$. Las usamos entonces con $A = E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ de donde obtenemos

$$m^*(E) \geq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(E_k) \quad \text{y} \quad m^*(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(E_k)$$

y el teorema está probado. □

En general, a las clases de conjuntos que tengan propiedades como las de (i), (ii) y (iii) en el Teorema 1.3.1 se les llama σ-álgebra, y específicamente al conjunto $\mathcal{L}$ (que proviene del modo de medir intervalos) se le llama σ-álgebra de Lebesgue y a los conjuntos en $\mathcal{L}$ se les llama Lebesgue medibles. A funciones de conjunto con las propiedades (i), (ii) y (iii) del Teorema 1.3.2 se les llama medida, específicamente a la función $m^*_{|_\mathcal{L}} : \mathcal{L} \to [0, \infty]$ se le llama medida de Lebesgue de $\mathbb{R}$ y la denotamos $m^*_{|_\mathcal{L}} = m$. En el Capítulo 2 veremos estas definiciones en general.

Teorema 1.3.3 *Si I es un intervalo en $\mathbb{R}$, acotado, entonces I es medible, y por lo tanto $m(I) = \ell(I)$.*

Demostración. Como ya mencionamos antes, basta ver que se satisface (1.13), para todo $A \subset \mathbb{R}$ con $m^*(A) < \infty$.

Sea $n \in \mathbb{N}$ e I_n un intervalo contenido en I con $\ell(I_n) > \ell(I) - 1/n$. Entonces $\lim_{n\to\infty} m^*(I \setminus I_n) = 0$. Note también que $A \supset (A \cap I_n) \uplus (A \cap I^c)$, de modo que

$$\begin{aligned} m^*(A) &\leq m^*((A\cap I_n)\uplus(A\cap I^c)) \\ &\leq m^*(A\cap I_n)+m^*(A\cap I^c) \end{aligned}$$

También $A\cap I=(A\cap I_n)\uplus(A\cap(I\cap I_n^c)$. Y de ahí,

$$m^*(A\cap I_n)\leq m^*(A\cap I)\leq m^*(A\cap I_n)+m^*(I\setminus I_n)$$

Tomando límites tenemos $m^*(A\cap I)=\lim_{n\to\infty}m^*(A\cap I_n)$ de modo que $m^*(A)\geq m^*(A\cap I)+m^*(A\setminus I)$ y por lo tanto I es medible. $\square$

Como se tiene que $m(I)=\ell(I)$ para intervalos m se considera una extensión de la longitud de intervalos y es la que estábamos buscando. La pregunta ahora es ¿existen otras extensiones de ℓ?. La respuesta es no. Es decir si tenemos otra función μ definida en $\mathcal{L}$ satisfaciendo las condiciones (i), (ii) y (iii) del Teorema 1.3.1 tal que $\mu(I)=\ell(I)$ en intervalos, se debe tener que $\mu=m$.

Teorema 1.3.4 *Si μ es una medida definida en $\mathcal{L}$ (i.e. $\mu(\emptyset)=0$ y $\mu(\uplus_{k=1}^{\infty}E_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu(E_k)$) tal que $\mu(I)=m(I)$ para todo los intervalos abiertos $I\subset\mathbb{R}$, entonces $\mu=m$.*

Demostración. Primero mostraremos para $E\subset I_n=(-n,n)$.

Considere $\{J_k\}_{k=1}^{\infty}$ un cubrimiento de E por intervalos abiertos, entonces

$$\mu(E)\leq\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty}J_k)\leq\sum_{k=1}^{\infty}\mu(J_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\ell(J_k),$$

tomando ínfimo sobre todos los cubrimientos de E tenemos $\mu(E)\leq m^*(E)=m(E)$.

También se tienen las igualdades siguientes $\mu(E)+\mu(I_n\setminus E)=\mu(I_n)=m(I_n)=m(E)+m(I_n\setminus E)$. Como todos los términos son finitos y además $\mu(E)\leq m(E)$ y $\mu(I_n\setminus E)\leq m(I_n\setminus E)$ sólo se puede tener $\mu(E)=m(E)$.

Para $E\in\mathcal{L}$ arbitrario defina $E_1=E\cap I_1$, $E_i=E\cap(I_i\setminus I_{i-1})$, de modo que $E=\biguplus_{j=1}^{\infty}E_j$. Y como $\mu(E_n)=m(E_n)$ tenemos entonces que $\mu(E)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)=\sum_{n=1}^{\infty}m(E_n)=m(E)$ pues tanto μ como m son medidas. $\square$

Teorema 1.3.5 *Si E, F son medibles y si $E \subset F$ entonces $m(E) \leq m(F)$ y si además $m(E) < \infty$ se tiene $m(F \setminus E) = m(F) - m(E)$.*

Demostración. Como m es aditivo en $\mathcal{L}$ y $F = E \uplus (F \setminus E)$ vale $m(F) = m(E) + m(F \setminus E)$, de donde $m(E) \leq m(F)$ y si $m(E) < \infty$ se puede restar $m(E)$ en ambos miembros y queda $m(F) - m(E) = m(F \setminus E)$. □

Teorema 1.3.6 (i) *Si $\{E_n\}$ es tal que $E_k \subset E_{k+1}$ entonces*

$$m(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = \lim_{k\to\infty} m(E_k).$$

(ii) *Si $\{F_n\}$ es tal que $F_{k+1} \subset F_k$ entonces*

$$m(\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k) = \lim_{k\to\infty} m(F_k).$$

Demostración. Parte (i). Si $m_{k_0} = \infty$ para algún $k_0 \in \mathbb{N}$ entonces no hay mucho que mostrar.

Supongamos entonces que $m(E_k) < \infty$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Hagamos $A_1 = E_1$ y $A_k = E_k \setminus E_{k-1}$, de modo que los $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ forman una colección numerable de conjuntos medibles disjuntos, con $m(A_j) < \infty$ para todo $j \in \mathbb{N}$ y además $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, $E_k = \bigcup_{j=1}^{k} A_j$, $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \biguplus A_k$.

Siendo así, la parte (i) queda probada con la siguiente cadena de igualdades.

$$\begin{aligned}
m(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) &= m(\biguplus_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} m(A_k) \\
&= E_1 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} m(E_k) - m(E_{k-1}) \\
&= \lim_{n\to\infty} m(E_n)
\end{aligned}$$

La parte (ii) es similar. Definimos $E_k = F_1 \setminus F_k$, de modo que E_k es creciente y por la parte (i) tenemos

$$m(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = \lim_{k\to\infty} m(E_k) = \lim_{k\to\infty} m(F_1) - m(F_k) = m(F_1) - \lim_{k\to\infty} m(F_k)$$

pero como $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = F_1 \setminus (\cap_{k=1}^{\infty} F_k)$ se tiene también que

$$m(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = m(F_1) - m(\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k)$$

que junto a la ecuación anterior nos da

$$m(\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k) = \lim_{k\to\infty} m(F_k)$$

□

Ejercicios

1.1 Si $m^*(A) = 0$ entonces A es medible.

1.2 Diga si es verdadero o falso y justifique su respuesta.

   (a) Unión arbitraria de conjuntos medibles es medible.

   (b) Si E es un subconjunto de $\mathbb{R}$ tal que $m_*(E) < \infty$ entonces $m^*(E) < \infty$.

   (c) Si F es un conjunto cerrado de $\mathbb{R}$ y $\ell(F) = 0$ entonces $F = \emptyset$.

1.3 Sea E_1 y E_2 dos subconjuntos medibles de $[0,1]$. Pruebe que si $m(E_1) = 1$ entonces $m(E_1 \cap E_2) = m(E_2)$.

1.4 Sea E el Cantor común en un intervalo (retirando los tercios medios). Muestre que $m(E) = 0$.

1.5 Demuestre que hay subconjuntos cerrados $E \subset [0,1]$ con medida positiva que no contienen intervalos.

1.6 Sean I un intervalo finito y $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subintervalos de I dos a dos disjuntos. Demuestre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) \leq \ell(I)\,.$$

1.7 eran $E \subset \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$. Pruebe que:

$$m^*(E \cap \{a\}) = m^*(E)\,.$$

1.8 Si $a \in \mathbb{R}$ entonces $m^*(\{a\}) = 0$. Concluya que el conjunto $\mathbb{Q}$ de los irracionales es medible y tiene medida cero.

Capítulo 2

Medida: Definición, Uso y Propiedades

En este capítulo generalizaremos lo que desarrollamos en el capitulo anterior para intervalos de modo que se pueda usar el concepto de medida en cosas más generales y a la vez familiares como pesar, medir (áreas, volúmenes, etc.) y también contar.

2.1 σ-álgebra

La medida, como se vio en el caso de la recta, asigna a cada conjunto un valor real no negativo que es llamada su medida que dependiendo del problema puede significar peso, área, longitud, o cantidad de elementos de dicho conjunto. Pero debido a las propiedades requeridas para una medida no siempre es posible asignar dicho número a todos los conjuntos. Por esta razón es importante especificar la clase de conjuntos que se puede medir.

Dado entonces un espacio Ω consideramos la clase $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ de subconjuntos de Ω con las siguientes propiedades: la clase contiene al espacio completo, a los complementos de cada elemento y a uniones numerables de sus elementos. Una clase con estas propiedades es llamada `σ-álgebra de conjuntos` de Ω. Dicho de otro modo $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ es una σ-álgebra de conjuntos de Ω si cumple las siguientes propiedades.

I. Ω está en $\mathcal{A}$.

II. Para todo $A \in \mathcal{A}$ se tiene $A^c \in \mathcal{A}$.

III. Si $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ y $A_n \in \mathcal{A}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $A \in \mathcal{A}$.

Siguiendo la tradición, llamaremos `medibles` a los conjuntos pertenecientes a la σ-álgebra de la cual estemos hablando.

Ponemos a consideración del lector las siguientes clases de conjuntos que afirmamos son σ-álgebras:

1. Si Ω es cualquier conjunto tome $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Esto es, la clase formada por todos los subconjuntos de Ω siempre es una σ-álgebra.
2. También, $\mathcal{A} = \{\Omega, \emptyset\}$ es una σ-álgebra para cualquier conjunto Ω.
3. Considere $\Omega = \{1, 2, \ldots\} = \mathbb{N}$ el conjunto de los naturales. Podemos tomar como σ-álgebra a la clase $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1, 3, 5, \ldots\}, \{2, 4, 6, \ldots\}, \Omega\}$.
4. Sea Ω un conjunto no numerable. La clase $\mathcal{A}$ de los conjuntos numerables o que tienen complemento numerable es una σ-álgebra.
5. Sea $\Omega = \mathbb{R}$. En este conjunto además de las σ-álgebras como en 1, 2 y 4 arriba, se puede considerar la σ-álgebra $\mathcal{A} = \mathcal{L}$ formada por los conjuntos medibles (los subconjuntos de $\mathbb{R}$ que satisfacen la condición de Caratheodory) como en la definición del capítulo anterior. Precisamente, la última parte del capítulo anterior estuvo dedicada a demostrar que la clase de los conjuntos medibles es una σ-álgebra

2.2 Medidas y sus Propiedades

Como mencionamos al inicio de este capítulo, una medida es una función que asigna a cada subconjunto de una σ-álgebra un número. Pero esta asignación no puede ser arbitraria pues deseamos imitar las propiedades de medir peso, area, volumen, longitud, cantidad de elementos, etc. Por eso se le debe requerir a dicha función algunas propiedades que modelan las propiedades que deseamos.

En este sentido llamaremos `medida` a una función $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ definida en una σ-álgebra $\mathcal{A}$ que satisfaga las siguientes propiedades:

I. La medida del conjunto vacío es cero. $\mu(\emptyset) = 0$.

II. La función μ es contablemente aditiva (σ-aditiva) esto es:

$$\mu(\biguplus_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \ .$$

Una terna $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ donde Ω es un conjunto, $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra y μ es una medida sobre $\mathcal{A}$ se llama `espacio de medida`. El par $(\Omega, \mathcal{A})$ se le llama `espacio medible`. Un espacio de medida se llama `espacio de medida finito` si $\mu(\Omega) < \infty$, o también que μ es una medida finita. En el caso particular en que $\mu(\Omega) = 1$ el espacio de medida es llamado `espacio de probabilidad`. Observe que en el caso de un espacio de medida finito las medidas de todos los demás conjuntos medibles tienen que estar entre 0 y $\mu(\Omega)$, i.e. $0 \leq \mu(A) \leq \mu(\Omega)$ para todo conjunto medible A.

A continuación enumeramos propiedades de los espacios de medida.

Proposición 2.2.1 *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, se cumple lo siguiente:*

1. *Sean A, B conjuntos medibles, con $A \subset B$ y $\mu(B) < \infty$ entonces $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.*
2. *Si $A_n \nearrow A$, i.e. si A_n es una sucesión de conjuntos medibles que crece hacia A, entonces A es un conjunto medible y $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.*
3. *Si $A_n \searrow A$, i.e. si A_n es una sucesión de conjuntos medibles que decrece hacia A, y existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(A_{n_0} < \infty$ entonces A es un conjunto medible y $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.*
4. *Si A_i son conjuntos medibles para todo $i \in \mathbb{N}$ entonces $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.*
5. *Para cualquier sucesión A_n de conjuntos medibles se tiene que $\mu(\liminf_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \liminf_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$ y si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(\bigcup_{i=n_0}^{\infty} A_i) < \infty$ entonces $\limsup_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \leq \mu(\limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n)$. En particular si $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ es un espacio de probabilidad $A_n \to A$ implica que $P(A_n) \to P(A)$.*
6. *Si $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) < \infty$ entonces $\mu(\limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 0$.*

Las afirmaciones 2 y 3 son las mismas afirmaciones hechas en el Teorema 1.3.6 y las demostraciones son esencialmente las mismas.

Demostración. 1. Note que $B = A \uplus (B \setminus A)$ de modo que $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$ y de ahí, $\mu(B) - \mu(A) = \mu(B \setminus A)$.

2. En el caso en que exista un A_n con $\mu(A_n) = \infty$ y considerando que la sucesión es creciente entonces la propiedad se cumple. Sólo queda por demostrar en el caso en que $\mu(A_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En esta caso escribimos la sucesión A_n como

$$A = A_1 + \biguplus_{i=2}^{\infty}(A_i \setminus A_{i-1})$$

de modo que la propiedad II de la definición de medida implica

$$\begin{aligned}
\mu(A) &= \mu(A_1) + \sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i \setminus A_{i-1}) \\
&= \mu(A_1) + \sum_{i=1}^{\infty}(\mu(A_i) - \mu(A_{i-1})) \\
&= \lim_{n\to\infty}\mu(A_1) + \sum_{i=1}^{n}(\mu(A_i) - \mu(A_{i-1})) \\
&= \lim_{j\to\infty}\mu(A_j)
\end{aligned}$$

3. La demostración se hace de modo análogo a la parte 2 considerando que en este caso A se puede escribir como

$$A = A_{n_0} \setminus \bigcup_{i=n_0}^{\infty}(A_{n_0} \setminus A_i)\,.$$

4. En este caso podemos escribir

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 + \biguplus_{n=2}^{\infty}(A_n \setminus \cup_{i=1}^{n-1} A_i)\,,$$

de modo que

$$\mu(A) = \mu(A_1) + \sum_{n=2}^{\infty}\mu(A_n \setminus \cup_{i=1}^{n-1} A_i)$$

$$\leq \quad \mu(A_1) + \sum_{n=2}^{\infty} \mu(A_n) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

5. De la definición $\liminf A_n = \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{i=n}^{\infty} A_i$. Así,

$$\left\{ \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i \right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

es una sucesión creciente de conjuntos. Con lo que, usando la parte 2, tenemos

$$\begin{aligned} \mu(\liminf A_n) &= \lim_{n\to\infty} \mu(\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i) \\ &= \liminf \mu(\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i) \\ &\leq \liminf \mu(A_n) \end{aligned}$$

donde la última desigualdad sigue del hecho que $\cap_{i=n}^{i} nftyA_i \subset A_n$.

El caso del límite superior es análogo pero necesitamos que $\mu(\bigcap_{i=n_0}^{\infty} A_i) < \infty$ en algún n_0 para poder usar la parte 3.

Si tenemos un espacio de probabilidad la condición anterior se cumple siempre con lo que tendremos que

$$A_n \to A \quad \Longrightarrow \quad \lim P(A_n) = P(\lim A_n)\,.$$

6. De la parte 4 se tiene que $\mu(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=n}^{\infty} \mu(A_i) < \infty$, de modo que

$$\begin{aligned} \mu(\limsup A_n) &= \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i) \\ &= \lim \mu(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=n}^{\infty} \mu(A_i) = 0 \end{aligned}$$

puesto que $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$ implica $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=n}^{\infty} \mu(A_i) = 0$. $\square$

Ejemplo 1. El Capítulo 1 estuvo dedicado a demostrar que $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$ es un espacio de medida.

Ejemplo 2. Para el espacio $\Omega = \{a, b\}$ podemos definir la σ-álgebra $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega, \{a\}, \{b\}\}$. En este ejemplo podemos dar una medida μ de la siguiente manera. Tome $p, q \in \mathbb{R}$ y defina $\mu(\{a\}) = p$, $\mu(\{b\}) = q$, $\mu(\emptyset) = 0$ y $\mu(\Omega) = p + q$. De este modo μ es una medida finita y será una medida de probabilidad si $p + q = 1$.

Ejemplo 3. En un espacio medible $(\Omega, \mathcal{A})$ siempre es posible definir una medida de la siguiente manera:

$$\mu(A) = \begin{cases} \#A & \text{si } A \text{ es finito} \\ \infty & \text{en cualquier otro caso,} \end{cases}$$

donde $\#A$ significa la cantidad de elementos del conjunto A. Esta medida es llamada usualmente `medida de conteo`.

Ejemplo 4. Consideremos el espacio medible $(\Omega, \mathcal{A})$ donde el conjunto $\{p\}$ sea medible, en este caso se puede definir la siguiente medida:

$$\mu(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ p \in A \\ 0 & \text{si } \ p \notin A \end{cases}$$

Con esta propiedad la medida se dice que esta medida está concentrada en p. Esta medida es usualmente llamada δ-Dirac en p y denotada δ_p.

2.3 Funciones Medibles

En esta sección estaremos hablando de un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Sean $A \subset \Omega$ un conjunto medible y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que f `es medible` si $\{x \in A \mid f(x) > \alpha\}$ es medible para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Con esta definición estamos tomando preimágenes de intervalos del tipo (α, ∞) o $(\alpha, \infty]$ si estamos trabajando en la recta extendida. Como veremos posteriormente esta definición es equivalente a pedir que la preimagen de cualquier intervalo abierto sea medible. Naturalmente debemos definir lo que es abierto en la recta extendida, no lo haremos aquí pero mencionamos que en el libro [1] se puede encontrar una exposición sobre la topología de la recta extendida.

Proposición 2.3.1 *Sean $A \subset \Omega$ medible y $f : A \to \mathbb{R}$ una función, entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(i) *f es medible.*

(ii) *$f^{-1}([\alpha, \infty))$ es medible para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.*

(iii) *$f^{-1}((-\infty, \alpha))$ es medible para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.*

(iv) *$f^{-1}((-\infty, \alpha])$ es medible para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Demostración. (i)$\Rightarrow$ (ii) pues si tomamos β_n una sucesión creciente a α entonces

$$f^{-1}([\alpha, \infty)) = f^{-1}(\bigcap_{n=1}^{\infty} (\beta_n, \infty)) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}((\beta_n, \infty))$$

que es medible (pues $f^{-1}((\beta_n, \infty))$ es medible de la definición de f ser medible).

(ii)$\Rightarrow$ (iii) pues $f^{-1}((-\infty, \alpha)) = \mathbb{R} \setminus f^{-1}([\alpha, \infty)) = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus [\alpha, \infty)$.

(iii)$\Rightarrow$ (iv) pues $f^{-1}((-\infty, \alpha]) = \cap(f^{-1}(-\infty, \alpha_n)) = f^{-1}(\cap(-\infty, \alpha))$ tomando una sucesión α_n decreciente a α.

(iv)$\Rightarrow$ (i) pues $f^{-1}((\alpha, \infty)) = \mathbb{R} \setminus f^{-1}((-\infty, \alpha])$. □

Sea $A \subset \Omega$ un conjunto medible y $f, g : A \to \mathbb{R}$ dos funciones, diremos que f es igual g `en casi toda parte` (o `casi todo punto`) y escribiremos $f = g$ c.t.p. si el conjunto de puntos donde f no es igual a g tiene medida cero esto es $m(\{x \in A \mid f(x) \neq g(x)\}) = 0$.

Proposición 2.3.2 *Sea $A \subset \Omega$ medible, $f : A \to \mathbb{R}$ medible y $g : A \to \mathbb{R}$ una función tal que $f = g$ c.t.p. , entonces g es medible.*

Demostración. Defina $E = \{x \in A \ : \ f(x) \neq g(x)\}$, de las hipótesis se tiene que E es medible y $m(E) = 0$, y además que cualquier subconjunto de E es medible y tiene medida cero. De modo que

$$\begin{aligned} g^{-1}((\alpha, \infty)) &= \{x \in A \mid g(x) > \alpha\} \\ &= (\{x \in A \mid f(x) > \alpha\} \setminus E) \bigcup \{x \in E \mid g(x) > \alpha\} \end{aligned}$$

que es unión de conjuntos medibles. □

Sean $A \subset \Omega$, $f, g : A \to R$ funciones y $c \in \mathbb{R}$. Definimos las funciones, $f + c, cf, f + g, fg : A \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

- $(f + c)(x) = f(x) + c$,
- $(cf)(x) = c\, f(x)$,
- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$,
- $(fg)(x) = f(x)g(x)$.

Para la función $f \cdot f$ usaremos la notación f^2.

Teorema 2.3.1 *Sea $A \subset \Omega$ medible y $f, g : A \to \mathbb{R}$ funciones medibles y $c \in \mathbb{R}$. Entonces las funciones $f + c$, cf, f^2, $f + g$, $fg : A \to \mathbb{R}$ son medibles.*

Demostración. Para $f + c$ note que $(f + c)^{-1}((\alpha, \infty)) = f^{-1}((\alpha - c, \infty))$.

Para la función cf, en el caso $c = 0$ se tiene $cf = 0$ y por lo tanto $(cf)^{-1}(\alpha, \infty) = \emptyset$ si $\alpha \geq 0$ y $(cf)^{-1}(\alpha, \infty) = \mathbb{R}$ si $\alpha < 0$.

En el caso $c > 0$, se tiene que $(cf)^{-1}(\alpha, \infty) = f^{-1}(\frac{\alpha}{c}, \infty)$. Dejamos el caso $c < 0$ como ejercicio.

Considere ahora el conjunto $\mathbb{Q} = \{r_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ que es una enumeración de los irracionales, y sea $\alpha \in \mathbb{R}$ cualquiera y $x \in A$,

Ahora, $f(x) + g(x) > \alpha$ es equivalente a que exista r_n tal que $f(x) > r_n > \alpha - g(x)$, es decir

$$\begin{aligned}
(f + g)^{-1}((\alpha, \infty)) &= \{a \in A \mid f(x) + g(x) > \alpha\} \\
&= \bigcup_{n=1}^{\infty} (\{x \in A \mid f(x) > r_n\} \cap \{x \in A \mid r_n > g(x) - \alpha\}) \\
&= \bigcup_{n=1}^{\infty} [f^{-1}((r_n, \infty)) \cap g^{-1}((\alpha - r_n, \infty))]
\end{aligned}$$

y por lo tanto $f + g$ es medible.

Ahora $(f^2)^{-1}(\alpha,\infty) = \{a \in A \mid (f(x))^2 > \alpha\} = A$ si $\alpha < 0$. Si $\alpha \geq 0$ entonces $\sqrt{\alpha}$ y $-\sqrt{\alpha}$ están en $\mathbb{R}$ y

$$(f^2)^{-1}(\alpha,\infty) = \{x \in A \mid f(x) > \sqrt{\alpha}\} \bigcup \{x \in A \mid f(x) < -\sqrt{\alpha}\}$$

y por lo tanto f^2 es medible.

Similarmente fg es medible pues siendo $f+g$, f^2 y g^2 medibles, se tiene que $fg = \frac{1}{2}((f+g)^2 - f^2 - g^2$ es medible. □

El siguiente teorema es importante pues en el estarán basados la mayor parte de las demostraciones sucesivas de esta sección así como de la teoría de integración.

Teorema 2.3.2 *Sean $a \subset \mathbb{R}$, un conjunto medible y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles de A en $\mathbb{R}$, tal que para todo $x \in A$, $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada de números reales. En este caso, las funciones $K, k : A \to \mathbb{R}$ definidas por*

$$\begin{aligned} K(x) &= \sup\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \qquad y \\ k(x) &= \inf\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

son medibles.

Demostración. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y observe que si $x \in A$, entonces

$$k(x) < \alpha \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{existe } \ n \in \mathbb{N} \ \text{ tal que } \quad f_n(x) < \alpha\,,$$

por lo tanto $k^{-1}((-\infty,\alpha)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}((-\infty,\alpha))$ es medible. Similarmente obtenemos $K^{-1}((\alpha,\infty)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}((\alpha,\infty))$, es medible. □

Corolario 2.3.1 *El máximo y el mínimo entre dos funciones medibles, es medible.*

Sea $A \subset \Omega$ medible, $f : A \to \mathbb{R}$ una función y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones $f_n : A \to \mathbb{R}$. Diremos que $\{f_n\}$ `converge a` f `en` c.t.p. (y escribimos $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ c.t.p.) si existe un subconjunto $E \subset A$ de medida cero ($m(E) = 0$) tal que para todo x que no está en E se tiene que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

Si f_n es una sucesión monótona no decreciente (i.e. si $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ para todo x) y si es acotada se tendrá que existe el límite pues en este caso

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \sup\{f_n(x) \ : \ n \in \mathbb{N}\}$$

y obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \inf\{f_n(x) \ : \ n \in \mathbb{N}\}$$

si la sucesión es monótona no creciente y acotada.

Para todo $n \in \mathbb{N}$ definimos las funciones K_n y k_n como

$$\begin{array}{rcll} K_n(x) & = & \sup\{f_r(x) \mid r \geq n\} & \text{para todo } x \in A \\ k_n(x) & = & \inf\{f_r(x) \mid r \geq n\} & \text{para todo } x \in A \end{array}$$

Notemos que K_n es una sucesión monótona no creciente y k_n es una sucesión monótona no decreciente. Si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotado, también lo serán las funciones K_n y k_n, de modo que podemos definir

$$\begin{array}{rcll} S(x) & = & \inf\{K_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\} & \text{y} \\ s(x) & = & \sup\{k_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}, & \end{array}$$

Es decir $\lim_{n\to\infty} K_n = S$ y $\lim_{n\to\infty} k_n = s$.

Las funciones $S : A \to \mathbb{R}$ y $s : A \to \mathbb{R}$ se llaman respectivamente `límite superior` y `límite inferior` de la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, y se denotan por

$$S = \limsup f_n$$

$$s = \liminf f_n \,.$$

Proposición 2.3.3 *Se tiene que f_n converge a f (i.e. $f_n(x)$ converge a $f(x)$ para todo $x \in A$) si, y solamente si* $\limsup f_n = \liminf f_n$.

Demostración. La demostración de esta proposición queda a cargo del lector en el ejercicio 2.4.

Teorema 2.3.3 *Si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones medibles y acotadas entonces* $\liminf f_n$ *y* $\limsup f_n$ *son medibles.*

Demostración. Observemos que K_n es medible para todo n, por lo tanto $\limsup f_n$ es igual a $\inf K_n$ que es medible. Un argumento similar se usa para $\liminf f_n$. $\square$

En el teorema anterior la condición de que las funciones sean acotadas es debido a que estamos tomando funciones en $\mathbb{R}$ si estuviésemos trabajando en los reales extendidos esta condición no sería necesaria, ver [1, 2].

Corolario 2.3.2 *Si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones medibles, entonces* $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ *es medible.*

Proposición 2.3.4 *Si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones medibles tal que* $\lim f_n = f$ c.t.p. , *entonces f es medible.*

Demostración. Como f_n converge c.t.p. a f, existe E con $m(E) = 0$ tal que para todo $x \in A \setminus E$, $f_n(x)$ converge a $f(x)$. Defina $g_n : A \to \mathbb{R}$ como $g_n(x) = f_n(x)$ cuando $x \in A \setminus E$ y como $g_n(x) = 0$ si $x \in E$. Entonces $\lim g_n = g : A \to \mathbb{R}$, además $g(x) = f(x)$ cuando $x \in A \setminus E$, y $g(x) = 0$ en E.

Con esta construcción tenemos que $g_n = f_n$ c.t.p. y por lo tanto los g_n son medibles, de modo que $\lim g_n = g$ es medible y como $g = f$ c.t.p. tenemos que f es medible. $\square$

Considere $E \subset A \subset \Omega$, definimos la `función característica` de E como la función $\chi_E : A \to \mathbb{R}$ tal que

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \in A \setminus E\,. \end{cases}$$

Asimismo, diremos que una función $h : A \to \mathbb{R}$ es una `función simple` si la imagen de h es un conjunto finito.

Proposición 2.3.5 *Sea $A \subset \Omega$ medible y $h : A \to \mathbb{R}$ una función simple con $h(A) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, entonces h es medible si, y solamente si los conjuntos $A_i = h^{-1}(\alpha_i)$ son conjuntos medibles.*

La demostración de esta proposición se deja a cargo del lector en el ejercicio 2.5. Observe que los conjuntos A_i de la proposición anterior son disjuntos y tales que $\biguplus_{i=1}^{n} A_i = A$, y que la función h puede escribirse como $h = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i}$. (Ejercicio 2.6.)

Teorema 2.3.4 (Aproximación) *Sea $A \subset \Omega$ un conjunto medible y $f : A \to [0, \infty)$ una función medible (positiva). Entonces existe una sucesión de funciones simples medibles $\{h_n\}$ tal que:*

(i) $h_{n-1} \leq h_n \leq h_{n+1}$, *$\{h_n\}$ es una sucesión monótona creciente.*

(ii) $\lim_{n\to\infty} h_n = f$.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ dividamos el intervalo $[0, n)$ en intervalitos de tamaño 2^{-n} es decir. Los intervalitos son de la forma $I_i = [\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n})$, con $i = 1, \ldots, n2^n$.

Para cada intervalo I_i definamos el conjunto $E_{n_i} = f^{-1}(I_i)$. Y con esto, para cada n, podemos definir la función simple

$$h_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{E_{n_i}} .$$

Tenemos entonces que siendo f medible, los E_{n_i} son conjuntos medibles y por la Proposición 2.3.5 las funciones h_n también son funciones (simples) medibles.

Ahora, para $x \in A$ y $n \in \mathbb{N}$, si $f(x) \geq n+1$ definimos $h_n(x) = h_{n+1}(x)$, si $f(x) \in [n, n+1)$ se tiene que $h_n(x) = 0$ y $h_{n+1}(x) \geq 0$.

Si $f(x) \in [0, n)$, entonces existe $i \in \{1, \ldots, n2^n\}$ tal que $f(x) \in [\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n})$ de modo que $h_n(x) = \frac{i-1}{2^n}$.

Si consideramos ahora $n+1$ estaremos subdividiendo los intervalitos por la mitad, de modo que ahora existirá $j \in \{2i-1, 2i\}$ tal que $f(x) \in [\frac{j-1}{2^{n+1}}, \frac{j}{2^{n+1}})$, por consiguiente

$$h_{n+1}(x) = \frac{j-1}{2^{n+1}} \geq \frac{i-1}{2^n} = h_n(x)$$

y así h_n es una sucesión creciente.

Se tiene también que $h_n \leq f$, para todo $n \in N$. Sólo faltaría demostrar que $h_n(x)$ converge a $f(x)$ para todo $x \in A$.

En efecto, sea $x \in A$ entonces $f(x) \in [0, \infty)$, de modo que existe n_0 tal que $f(x) \in [0, n_0)$.

Ahora si $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq n_0$ tenemos que $h_n(x) \geq f(x) - 2^{-n}$, es decir $0 \leq f(x) - h_n(x) \leq 2^n$, y el teorema está probado. $\square$

2.4 Integral de Lebesgue

Sean $A \subset \Omega$ medible y $s : A \to \mathbb{R}$ una función simple, medible tal que $s(x) > 0$ para todo $x \in A$. Si $s(A) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ y $A_i = \{x \in A \mid s(x) = \alpha_i\}$, definimos la `integral de` s `sobre` A, denotada por $\int_A sdm$, como (el número real extendido)

$$\int_A sdm = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m(A_i)\,.$$

Ejemplo 5. Sea $A = [-1, 1]$, $s : A \to \mathbb{R}$, tal que

$$s(x) = \begin{cases} 5 & , \; x \in [-1, -1/2] \\ 0 & , \; x \in (-1/2] \\ 2 & , \; x \in (1/2, 1]\;. \end{cases}$$

De modo que

$$\begin{aligned} \int_{[-1,1]} s\,dm &= 5 \cdot m([-1, -1/2)) + 0 \cdot m((-1/2, 1/2] + 2 \cdot m((1/2, 1]) \\ &= 7/2\,. \end{aligned}$$

Proposición 2.4.1 (Linealidad) *Sean $A \subset \Omega$ medible, $s_1, s_2 : A \to \mathbb{R}$ funciones simples, medibles, tales que $s_i(x) > 0$ para todo $x \in A$, $i = 1, 2$, y $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Entonces:*

(i) $\int_A \alpha s_i dm = \alpha \int_A s_i dm$

(ii) $\int_A (s_1 + s_2) dm = \int_A s_1 dm + \int_A s_2 dm.$

Demostración. (i) Haremos para s_1. Tenemos que $s_1(A) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, luego, $\alpha s_1(A) = \{\alpha\alpha_1, \ldots, \alpha\alpha_n\}$, y $A_1 = \{x \in A \mid s_1(x) = \alpha_1\} = \{x \in A \mid \alpha s_1(x) = \alpha\alpha_1\}$. Por consiguiente

$$\int_A \alpha s_1 = \sum \alpha\alpha_i m(A_i) = \alpha \sum \alpha_i m(A_i) = \alpha \int_A s_1 dm\,.$$

(ii) Podemos escribir las funciones simples de la siguiente manera

$$s_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}, \qquad s_2 = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{B_j}$$

con $s_1(A) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $s_2 = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ y $\biguplus_{i=1}^n A_i = \biguplus_{j=1}^n B_j = A$. Y también la suma

$$s_1 + s_2 = \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \chi_{C_k}\,,$$

con $(s_1 + s_2)(A) = \{\gamma_1 \ldots, \gamma_p\}$ y $\biguplus_{k=1}^n C_k = A$.

Ahora bien, para todo k definimos el conjunto

$$J_k = \{(i,j) \in \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, m\} \ : \ \alpha_i + \beta_j = \gamma_k\}\,,$$

de modo que $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{p} J_k = \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, m\}$ y $\displaystyle C_k = \bigcup_{(i,j)\in J_k} A_i \cap B_j$.

Observe que cada sucesión conjuntos $\{A_i \cap B_k\}_{(i,j)\in J_k}$ es finita y disjunta por lo tanto

$$m(C_k) = \sum_{(i,j)\in J_k} m(A_i \cap B_k)\,,$$

que junto con la definición de integral de una función simple nos da

$$\begin{aligned}
\int_A (s_1 + s_2) dm &= \sum_{k=1}^{p} \gamma_k\, m(C_k) = \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \sum_{(i,j)\in J_k} m(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{k=1}^{p} \sum_{(i,j)\in J_k} (\alpha_i + \beta_j) m(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (\alpha_i + \beta_j) m(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i m(A_i \cap B_j) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \beta_j m(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m(A_i \cap A) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j m(A \cap B_j) \\
&= \int_A s_1 dm + \int_A s_2 dm
\end{aligned}$$

□

Sean A y B conjuntos medibles de Ω con $B \subset A$. Si $f : A \to \mathbb{R}$ es medible, entonces (vea ejercicio 27) $f|_B : B \to \mathbb{R}$ también es medible. Por lo tanto, si $B \subset A$, es un conjunto medible, y $s : A \to \mathbb{R}$ es una función simple, medible, no negativa, podemos definir la `integral sobre` B como $\int_B sdm = \int_B s|_B dm$.

Proposición 2.4.2 *Sean A y B subconjuntos de Ω, con $B \subset A$, $s_1, s_2 : A \to \mathbb{R}$ dos funciones simples, medibles y no negativas, entonces:*

(i) $s_1 \leq s_2$ *implica* $\int_A s_1 dm \leq \int_A s_2 dm$.

(ii) $\int_B s_1 dm \leq \int_A s_1 dm$.

(iii) $\int_A s_1 dm = 0$ *si, y solamente si* $s_1(x) = 0$ c.t.p..

(iv) $m(A) = 0$ *implica* $\int_A s_1 dm = 0$

La demostración de estas propiedades se dejan a cargo del lector.

Considere $A \subset \Omega$ medible y $f : A \to \mathbb{R}$ una función medible no negativa. Definimos la `integral de Lebesgue` de f sobre A, $\int_A f dm$, como

$$\int_A f dm = \sup\{\int_A sdm \mid s \in S\}$$

donde S es el conjunto de todas las funciones simples no negativas tal que $s \leq f$.

Observe que, con esta definición, habría dos modos de calcular la integral de una función simple, sin embargo estas dos definiciones coinciden en este caso. Mencionamos también que, similarmente al caso anterior, para $B \subset A$ se puede definir $\int_B f dm = \int_B f|_B dm$.

Para la integración concreta damos a continuación algunas propiedades que nos ayudan a hallar integrales de funciones en general.

Proposición 2.4.3 *Sean A y B subconjuntos medibles de Ω, con $B \subset A$, $f_1, f_2 : A \to \mathbb{R}$ funciones medibles no negativas, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$.Entonces:*

(i) $f_1 \leq f_2$ *implica* $\int_A f_1 dm \leq \int_A f_2 dm$.

(ii) $\int_B f_1 dm \leq \int_A f_1 dm$.

(iii) $\int_A \alpha f_i dm = \alpha \int_A f_i dm$.

(iv) $\int_A f_1 dm = 0$ *si, y solamente si,* $f_1(x) = 0$ c.t.p..

(v) $m(A) = 0$ *implica* $\int_A f_1 dm = 0$

2.5 Convergencia Monótona

Teorema 2.5.1 (Lebesgue) *Sea $A \subset \Omega$ medible, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones no negativas, $f_n : A \to \mathbb{R}$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Suponga que*

(i) $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$, *para todo* $x \in A$, $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *para todo* $x \in A$.

entonces

$$\int_A f dm = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n dm \,.$$

Demostración. Como el límite de funciones medibles es medible, se tiene que f es medible, y como los f_n son no negativos, f también lo será. Luego, $\int_A f dm$ está bien definida, y como vale (i), se tiene también $\int_A f_n dm \leq \int_A f_{n+1} dm$, de modo que $\{\int_A f_n dm\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión monótona creciente, y por lo tanto converge a algún $\alpha \in [0, \infty]$. Observe que (i) también implica que $\int_A f_n dm \leq \int_A f dm$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\alpha \leq \int_A f dm. \tag{2.1}$$

Tome ahora $s \geq 0$ una función simple tal que $s(x) \leq f(x)$ para todo $x \in A$. Fijamos $c \in (0, 1)$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ definimos el conjunto

$$E_n = \{a \in A \mid f_n(x) \geq c\, s(x)\}.$$

que es medible para todo n. Se cumple también que $E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n \subset E_{n+1}$. Ahora, como $f_n(x)$ converge a $f(x)$ para todo x debemos tener

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = A$$

de modo que

$$c \int_A s dm = \int_A cs dm = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} (cs) dm \;.$$

Ahora bien, para $n \in \mathbb{N}$

$$\int_A f_n dm \geq \int_{E_n} dm \geq \int_{E_n} csdm = c \int_{E_n} edm$$

y por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n dm \geq \lim_{n\to\infty} c \int_{E_n} sdm = c \int_A sdm.$$

Como esta última relación vale para todo $c \in (0,1)$, se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n dm \geq \int_A sdm\,.$$

y como hemos tomado un s arbitrario, usamos la definición de integral y obtenemos

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n dm \geq \int_A f dm\,,$$

que junto con la desigualdad (2.1) nos da la igualdad que buscamos. $\square$

Si juntamos este teorema con el de aproximación de funciones medibles por funciones simples tenemos que siempre es posible para todo f medible exhibir una sucesión de funciones simples s_n tal que $s_n \leq s_{n+1}$, $s_n \to f$ y $\lim_{n\to\infty} \int_A s_n dm = \int_A sdm$.

Conviene también observar que esto nos permite calcular (por aproximación) la integral de funciones. En vista de este teorema también podemos mencionar aquí una diferencia entre la integral de Riemann y la de Lebesgue. La integral de Riemann se calcula subdividiendo el dominio de definición de la función (en general un intervalo) calculando máximos y mínimos de la función en estos intervalitos, de modo que se puede formar una aproximación por arriba y otra por abajo de la integral de Riemann. En el caso de la integral de Lebesgue se subdivide el rango de la función en intervalitos y se mide la preimagen de estos intervalos para aproximar el área multiplicando la medida de la base por la altura (ya fijada) del conjunto.

Ejemplo 6. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ donde $\Omega = [0,1]$, y consideramos el $\mathcal{A}$ el σ-álgebra de los Lebesgue medibles y $\mu = m$ la medida de Lebesgue. Considere $f : A \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = x$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ definimos $s_n : A \to \mathbb{R}$

de la siguiente manera

$$s_n = \sum_{j=1}^{2^n} \frac{j-1}{2^n} \chi_{(\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}]}.$$

Vemos que $\lim s_n = f$ y que

$$\int_A s_n dm = \sum_{j=1}^{2^n} \frac{j-1}{2^n} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{2n}} \left[\frac{2^n(2^n+1)}{2} - 2^n \right]$$

cuyo límite nos da $\frac{1}{2}$.

Para concluir demostramos la propiedad de linealidad de la integral que hemos definido.

Teorema 2.5.2 *Sea A un conjunto medible y $f_1, f_2 : A \to \mathbb{R}$ funciones medibles no negativas. Entonces*

$$\int_A f_1 + f_2 dm = \int_A f_1 dm + \int_A f_2 dm .$$

Demostración. Tome s_n una sucesión creciente de funciones que convergen a f_1, por el Teorema 2.3.4, y t_n la correspondiente a f_2. Tenemos entonces que $s_n + t_n$ es una sucesión creciente de funciones simples que converge a $f_1 + f_2$ y por lo tanto $\int_A s_n + t_n dm \to \int_A f_1 + f_2\, dm$, pero también se tiene que $\int_A s_n + t_n dm = \int_A s_n\, dm + \int_A t_n\, dm$ por la Proposición 2.4.2 y por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_A f_1 + f_2\; dm &= \lim \int_A s_n + t_n\; dm = \lim \int_A s_n\; dm + \int_A t_n\; dm \\ &= \int_A f_1\; dm + \int_A f_2\; dm . \end{aligned}$$

□

Ejemplo 7. Considere el espacio $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ donde μ es la medida de conteo. Tome cualquier función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Como el σ-álgebra considerado incluye a todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$ entonces f es medible. Si hacemos $\alpha_n = f(n)$ podemos escribir

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{\{j\}}(x) .$$

para todo $x \in \mathbb{N}$. De modo que

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{\{j\}} d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(\{j\})$$

y como μ es la medida de conteo $\mu(\{j\}) = 1$ para todo j. Es decir

$$\int f d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \, .$$

Ejemplo 8. En el caso en que tengamos una medida concentrada en p y $f : \Omega \to \mathbb{R}$, tenemos que $f = f(p)\chi_{\{p\}}$ c.t.p.. De modo que

$$\int f d\delta_p = f(p).$$

Ejercicios

2.1 La función f es medible si, y solamente si la preimagen por f de cualquier abierto en $\mathbb{R}$ es medible.

2.2 La función f es medible si, y solamente si, la imagen inversa de cualquier intervalo es medible.

2.3 Probar que una función continua es medible.

2.4 Demuestre Proposición 2.3.3

2.5 Demuestre la Proposición 2.3.5

2.6 Una función simple $h : A \to \mathbb{R}$ se puede expresar como $h = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ con $\bigcup_{i=1}^{m} A_i \subset A$, y se pueden escoger los A_i de modo que sean disjuntos dos a dos. Recíprocamente, cualquier función $g : A \to \mathbb{R}$ de la forma $g = \sum_{j=1}^{m} \chi_{B_i}$ con $\bigcup_{i=1}^{m} B_i \subset A$ es una función simple.

2.7 Sean A y B conjuntos medibles de $\mathbb{R}$ con $B \subset A$. Si $f : A \to \mathbb{R}$ es medible, entonces $f|_B : B \to \mathbb{R}$ también es medible.

2.8 Demuestre la Proposición 2.4.2.

2.9 Demuestre la Proposición 2.4.3

Capítulo 3

Funciones Integrables

En este capítulo definiremos la integral de una función cualquiera. Debdido a que trataremos de función que pueden tomar valores positivos o negativos, necesitamos las siguientes definiciones.

Dada una función $f : A \to \mathbb{R}$ definimos:

- La `parte positiva` de f, como la función $f_+ : A \to \mathbb{R}$ tal que
$$f_+ = \max\{f, 0\}\,.$$
- La `parte negativa` de f como la función $f_- : A \to \mathbb{R}$ tal que
$$f_- = \{\max\{-f, 0\} = -\min\{f, 0\},.$$
- El `valor absoluto` de f como la función $|f| : A \to \mathbb{R}$ tal que
$$|f|(x) = |f(x)|\,.$$

Observe que las funciones arriba definidas son todas no negativas y además $|f| = f_+ + f_-$ y $f = f_+ - f_-$, y de ahí fácilmente se deduce que si f es medible también son medibles $|f|, f_+$ y f_-.

Sea A un conjunto medible y $f : A \to \mathbb{R}$ una función medible. Decimos que f es una `función Lebesgue integrable` (o simplemente `integrable`) si
$$\int_A |f| dm < \infty$$

y en este caso se define la integral de f como

$$\int_A f dm = \int_A f_+ dm - \int_A f_- dm\,. \tag{3.1}$$

Es fácil ver que si $f : A \to \mathbb{R}$ es integrable el hecho que $f_\pm \leq |f|$ obliga a que $\int_A f_\pm dm \leq \int_A |f| dm < \infty$ y por lo tanto finito de modo que la diferencia está bien definida y además $|\int_A dm| < \infty$, i.e. $\int_A f dm$ es finito.

Teorema 3.0.3 *Sea A un conjunto medible y $f_1, f_2 : A \to \mathbb{R}$ funciones integrables y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces:*

(i) $f_1 + f_2 : A \to \mathbb{R}$ *es integrable y* $\int_A f_1 + f_2\, dm = \int_A f_1\, dm + \int_A f_2\, dm$.

(ii) $\alpha f_1 : A \to \mathbb{R}$ *es integrable y* $\int_A \alpha f_1\, dm = \alpha \int_A f_1\, dm$.

Demostración. Usando la desigualdad triangular $|f_1 + f_2| \leq |f_1| + |f_2|$ obtenemos $\int_A |f_1 + f_2| dm \leq \int_A |f_1| + \int_A |f_2|$.

Podemos escribir $f_1 + f_2 = f_{1+} - f_{1-} + f_{2+} - f_{2-}$ y también que $f_1 + f_2 = g_+ - g_-$, donde g_+ y g_- son la parte positiva y la parte negativa de la función $f_1 + f_2$. Juntando estas dos igualdades y transponiendo términos podemos escribir

$$g_+ + f_{1-} + f_{2-} = g_- + f_{1+} + f_{2+}$$

y usando esta igualdad tenemos la siguiente sucesión de igualdades que demuestran la parte (i) del Teorema.

$$\begin{aligned}
\int_A (g_+ + f_{1-} + f_{2-})\, dm &= \int_A (g_- + f_{1+} + f_{2+})\, dm \\
\int_A g_+\, dm + \int_A f_{1-}\, dm + \int_A f_{2-}\, dm &= \int_A g_-\, dm + \int_A f_{1+}\, dm + \\
&\quad + \int_A f_{2+}\, dm \\
\int_A g_+\, dm - \int_A g_-\, dm &= \int_A f_{1+}\, dm - \int_A f_{1-}\, dm + \\
&\quad + \int_A f_{2+}\, dm - \int_A f_{2-}\, dm \\
\int_A (f_1 + f_2)\, dm = \int_A g\, dm &= \int_A f_1\, dm - \int_A f_2\, dm
\end{aligned}$$

Para la parte (ii) tenemos que si $\alpha = 0$ la afirmación se cumple trivialmente. Si $\alpha > 0$ tenemos que $(\alpha f_1)\pm = \alpha f_{1\pm}$ y si $\alpha < 0$ entonces $(\alpha f_1)_\pm = -\alpha f_{1\mp}$. □

3.1 Teoremas de Convergencia

Los siguientes son resultandos muy importante en la teoría de la medida. El primero de ellos lo enunciamos como teorema, por su importancia, pero es conocido usualmente como Lema de Fatou.

Teorema 3.1.1 (Lema de Fatou) *Sea A un conjunto medible y $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de funciones reales no negativas definidas en A, entonces*

$$\int_A (\liminf f_n) dm \leq \liminf \int_A f_n dm \,.$$

Demostración. Defina $k_n = \inf\{f_r(x) \mid r \geq n\}$ para cada $x \in A$, con esta definición se ve fácilmente que $\lim k_n(x) = \liminf f_n(x)$ y además $k_n(x) > 0$ para todo $x \in A$ (pues sucede lo mismo con $f_n(x)$). De aquí, por el teorema de la convergencia monótona, se tiene $\int_A \liminf f_n \, dm = \lim \int_A k_n \, dm$, pero como $k_n < f_n$ tenemos $\int_A k_n \, dm \leq \int_A f_n \, dm$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \int_A k_n \, dm = \int_A \liminf f_n \, dm \leq \liminf \int_A f_n \, dm \,.$$

□

Teorema 3.1.2 (Convergencia Dominada) *Sea A un conjunto medible y $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ funciones reales medibles definidas en A, tal que* $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ *existe para todo $x \in A$. Si existe una función $g : A \to \mathbb{R}$ integrable tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $|f_n(x)| \leq g(x)$ para todo $x \in A$, entonces la función*

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n \quad \textit{es integrable,} \quad \lim \int_A |f_n - f| dm = 0$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n dm = \int_A f dm \,.$$

Demostración. Como f es límite de funciones integrables es integrable, y como g es integrable tenemos, de la condición sobre g, que para todo $n \in \mathbb{N}$ f_n es integrable, y por la misma desigualdad, tomando límite, obtenemos $|f| \leq g$, lo que implica que f es integrable.

Ahora bien, $2g - |f_n - f|$ es una función medible no negativa y satisface

$$\int_A \liminf(2g - |f_n - f|)\, dm = \int_A \liminf 2g\, dm$$

y por el Lema de Fatou las funciones $\{2g - |f_n - f|\}$ satisfacen

$$\begin{aligned}
\int_A 2g\, dm &\leq \liminf \int_A 2g - |f_n - f|\, dm \\
&\leq \int_A 2g\, dm + \liminf(-\int_A |f_n - f|\, dm) \\
&\leq \int_A 2g - \limsup \int_A |f_n - f|\, dm
\end{aligned}$$

y por lo tanto $\limsup \int_A |f_n - f|\, dm \leq 0$ de donde $\int_A |f_n - f|\, dm = 0$.

Para mostrar la última afirmación del teorema observemos que

$$\left| \int_A (f_n - f)\, dm \right| \leq \int_A |f_n - f|\, dm$$

y por lo tanto

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \left| \int_A (f_n - f)\, dm \right| \leq \lim_{n\to\infty} \int_A |f_n - f|\, dm = 0,$$

de donde $\lim_{n\to\infty} \int_A (f_n - f)\, dm = 0$ y $\int_A f\, dm = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n\, dm$. □

3.2 Otros Modos de Convergencia

A continuación estaremos trabajando en un espacio medible $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, con funciones $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Para funciones definidas en $A \subset \Omega$, A medible, podemos definir en todo Ω una nueva función $\tilde{f}$ con la propiedad que

$$\int_\Omega \tilde{f} d\mu = \int_A f d\mu$$

del modo siguiente $\tilde{f} : \Omega \to \mathbb{R}$, con $\tilde{f}(x) = f(x)$ cuando $x \in A$ y $\tilde{f}(x) = 0$ si $x \notin A$.

En la sección anterior vimos teoremas que dicen cuándo el límite de funciones integrables es integrable y si el límite de las integrales es la integral del límite. Pero al hacer esto lo hicimos para el caso particular en que la convergencia de las funciones se da en todo punto.

Una primera generalización es definir la `convergencia en casi todo punto` (c.t.p.). Diremos que la sucesión $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ `converge` c.t.p. a la función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ si existe un subconjunto $A \subset \Omega$ medible tal que $\mu(\Omega \setminus A) = 0$ y la sucesión f_n converge en todo punto $x \in A$. Esta definición y el hecho de que la integral de un conjunto de medida cero es cero hace que podamos fácilmente adaptar las demostraciones de los teoremas anteriores para el caso en que las sucesiones solo converjan en casi todo punto.

Damos a continuación la definición de otros tipos de convergencia de funciones:

1. Decimos que $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, `converge uniformemente` a la función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 > 0$ tal que $\sup_{x\in\Omega} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$.

2. Decimos que $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, `converge en media` a la función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ si
$$\lim \int_\Omega |f_n - f| d\mu = 0 \,.$$
La convergencia en media también se denomina convergencia en L^1.

3. Decimos que $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, `converge en medida a` $f : \Omega \to \mathbb{R}$ si
$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in \Omega \;:\; |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\}) = 0$$
para todo $\alpha > 0$.

4. Decimos que $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, `converge casi uniformemente a` $f : \Omega \to \mathbb{R}$ si para cada $\delta > 0$ existe un conjunto $E_\delta \subset \Omega$ medible con $\mu(E_\delta) < \delta$ y tal que $f_n|_{\Omega \setminus E_\delta}$ converge uniformemente a $f|_{\Omega \setminus E_\delta}$.

A continuación daremos algunos teoremas que relacionan estos diversos modos de convergencia. No todas las posibles relaciones están incluidas y algunas han sido adaptadas para que se ajusten al carácter básico de este librito.

Es evidente de las definiciones que convergencia uniforme implica que converge en todo punto y por lo tanto en casi todo punto.

La convergencia casi todo punto no implica la convergencia en media. Sin embargo en el caso en que la sucesión sea dominada sí, como vimos en la sección anterior (Teorema 3.1.2).

Para el caso en que la medida del espacio es finita, como en el caso de los espacios de probabilidad, tenemos

Proposición 3.2.1 *Suponga que $\mu(\Omega) < \infty$ y que f_n es una sucesión que converge uniformemente a f en Ω, entonces f es integrable y f_n converge e f en media.*

Demostración. De la convergencia uniforme, dado $\varepsilon > 0$ existe $n(\varepsilon)$ tal que $n > n(\varepsilon)$ implica $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in \Omega$, por lo tanto

$$\int_\Omega |f_n - f| d\mu < \varepsilon\mu(\Omega) \quad \text{para todo } n > n(\varepsilon)$$

que es lo mismo que decir $\lim \int_\Omega |f_n - f| d\mu = 0$. □

La convergencia en medida no implica la convergencia casi todo punto pero si la existencia de una subsucesión que lo hace.

Proposición 3.2.2 *Si la sucesión $\{f_n\}$ converge en medida a f entonces existe una subsucesión que converge casi todo punto a f.*

Demostración. La definición de convergencia en medida es equivalente a que para todo $\alpha > 0$ y todo $\varepsilon > 0$ se puede hallar $N > 0$ tal que si $n > N$ se tiene que el conjunto $E = \{x \in \Omega \ : \ |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\}$ es tal que $\mu(E) < \varepsilon$, esm decir, es pequeño en medida.

Por lo tanto, para cada $k \in \mathbb{N}$ si tomo $\alpha = 2^{-k}$ y $\varepsilon = 2^{-k}$ podemos hallar un $n(k)$ suficientemente grande tal que $E_k = \{x \in \Omega \ : \ |f_{n(k)}(x) - f(x)| \geq 2^{-k}\}$ tiene medida $\mu(E_k) < 2^{-k}$.

Tomando $F_k = \cup_{j=k}^{\infty} E_k$ tenemos $F_k \subset \Omega$ medible y $\mu(F_k) < 2 \cdot 2^{-k}$. Así, el conjunto $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$ tiene medida nula.

Solo falta mostrar entonces que si $x \notin F$ entonces

$$\lim_{k\to\infty} f_{n(k)}(x) = f(x)\,.$$

En efecto, como $x \notin F$ entonces $x \notin F_k$ para ningún k. Esto es, existe $k_0 > k$ tal que $x \notin E_{k_0}$ es decir $|f_{n(k)}(x) - f(x)| < 2^{-k_0}$. Luego si $x \notin F$, dado $\varepsilon >$ podemos tomar k suficientemente grande como para que $2^{-k} < \varepsilon$ y así tenemos que existe k_0 tal que $|f_{n(k)}(x) - f(x)| < 2^{-k_0} < \varepsilon$. Lo que demuestra el límite que queríamos. □

Corolario 3.2.1 *Si la sucesión $\{f_n\}$ converge en medida a f entonces existe una subsucesión que converge casi uniformemente a f.*

Demostración. Este corolario viene de la demostración del teorema anterior, pues la subsucesión mostrada satisface que para todo δ puedo escoger el conjunto F_{k_0} con $\mu(F_{k_0}) < \delta$, bastando para ello tomar k_0 suficientemente grande. Una vez fijado el k_0 grande debemos mostrar que en el conjunto $\Omega \setminus F_{k_0}$ la subsucesion converge uniformemente.

En efecto, observe que si $x \notin F_{k_0}$ entonces $x \notin E_j$ para todo $j > k_0$, esto es $|f_{n(j)}(x) - f(x)| < 2^{-j}$ para todo $j > k_0$. Luego dado $\varepsilon > 0$ tome j_0 suficientemente grande (y mayor que k_0) como para que $2^{-j_0} < \varepsilon$. Escogiendo de esa manera podemos ver que $\sup_{x\in\Omega \setminus F_{k_0}}\{|f_{n(k)}(x) - f(x)|\} < \varepsilon$ para todo $k > j_0 > k_0$, lo que demuestra la afirmación. □

Para el siguiente teorema necesitamos la siguiente definición: Decimos que $\{f_n\}$ es una `sucesión de Cauchy en media` si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que si $n, m > N$ entonces

$$\int_\Omega |f_n - f_m| d\mu < \varepsilon.$$

Teorema 3.2.1 *Si la sucesión $\{f_n\}$ es de Cauchy en media, entonces existe una función f integrable tal que $f_n \to f$ en media.*

Demostración. Como la sucesión $\{f_n\}$ es de Cauchy, para cada $k \in \mathbb{N}$ podemos escoger una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ tal que $|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| < 2^{-k}$. Para simplificar la no tación haremos $g_k = f_{n_k}$. Ahora construyamos la siguiente sucesión

$$h_n = |g_1(x)| + \sum_{k=1}^{n} |g_{k+1}(x) - g_k|,$$

y usamos el Lema de Fatou para afirmar que se cumple.

$$\int \liminf h_n d\mu \leq \liminf \int \left(|g_1(x)| + \sum_{k=1}^{n} |g_{k+1}(x) - g_k| \right) d\mu \tag{3.2}$$

Observe que el lado derecho de la ecuación (3.2) es acotado pues la sumatoria es finita (≤ 1), debido a la forma como se escogieron los g_n.

Por otro lado, como (h_n) es una sucesión monótona creciente de funciones no negativas, se tiene que $\liminf h_n(x) = \lim h_n(x) = h(x)$ considerando $h(x)$ puede ser finito o $+\infty$.

En conclusión,

$$\int h d\mu \leq \int |g_1(x)| d\mu + 1,$$

como g_1 es integrable entonces h es integrable y por lo tanto $E = \{x \in \Omega : h(x) < \infty\}$ tiene complemento con medida nula, esto es, $\mu(\Omega \setminus E) = 0$. Esto es la serie que define h converge c.t.p.. Es decir podemos definir

$$f(x) = \begin{cases} g_1(x) \sum_{k=1}^{n} \{g_{k+1}(x) - g_k\} & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E\,. \end{cases}$$

Con esta definición y con lo mostrado anteriormente tenemos que f es integrable. También, $|g_k| \leq |g_1| + \sum_{j=1}^{k-1} |g_{j+1} - g_j| \leq h$ y $g_k \to f$ c.t.p., lo que nos permite usar el Teorema de la Convergencia Dominada para decir que f es integrable $g_k \to f$ en media.

Sólo falta ver que efectivamente f_n converge a f en media.

De la definiicón de sucesión de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$ y tomando $m > N(\varepsilon)$ y k suficientemente grandes tenemos

$$\int |f_m - g_k| d\mu \leq \varepsilon\,.$$

Aplicando el Lema de Fatou para la sucesión en k vemos que

$$\int |f_n - f| d\mu \leq \liminf_{k \to \infty} \int |f_m - g_k| d\mu \leq \varepsilon\,,$$

para tod $m \geq N(\varepsilon)$. Lo que prueba que f_n converge a f en media. $\square$

Proposición 3.2.3 *Si una sucesión converge en media entonces converge en medida.*

Demostración. Para cada $\alpha > 0$ hacemos

$$E_n(\alpha) = \{x \in \Omega \ : \ |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\},$$

entonces

$$\int_\Omega |f_n - f| d\mu \geq \int_{E_n(\alpha)} |f_n - f| d\mu \geq \alpha\mu(E_n(\alpha)).$$

Como $\int |f_n - f| d\mu \to 0$ esto implica que $\mu(E_n(\alpha)) \to 0$, pues $\alpha > 0$. $\square$

Proposición 3.2.4 *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones integrables que converge en medida a f y sea g integrable tal que $|f_n(x)| < g(x)$* c.t.p. . *Entonces f es integrable y f_n converge a f en media.*

Demostración. Suponga que f_n no converja a f en media. Entonces se puede conseguir una subsucesión (g_k) de $\{f_n\}$ tal que

$$\int |g_k - f| d\mu > \varepsilon$$

para todo k.

Como g_k es una subsucesión de f_n entonces también converge en medida a f, luego, existe una subsucesión h_r (de g_k) tal que h_r converge a f c.t.p. , y también $|h_r(\Omega)| < g(x)$. De aquí, y usando el Teorema de la Convergencia Dominada se tiene que h_r converge a f en media, pero esto no debería ocurrir pues h_r es un subsucesión de g_k. $\square$

La convergencia casi uniforme implica la convergencia en casi todo punto.

Proposición 3.2.5 *Si $f_n \to f$ casi uniformemente entonces $f_n \to f$* c.t.p. .

Demostración. Como la convergencia es casi uniforme podemos tomar deltas tan pequeños como queramos, digamos $\delta_k = 2^{-k}$ y obtener para cada uno de ellos un conjunto medible $E_k \subset \Omega$ con $\mu(E_k) < 2^{-k}$ y tal que f_n converge uniformemente a f cuando los restringimos a $\Omega \setminus E_k$.

Considere los conjuntos $F_k = \bigcup_{i=k}^{\infty} E_i$, los cuales forman una sucesión decreciente con k. Tome $F = \bigcap_{i=1}^{\infty} F_k$, que es medible, y como

$$\mu(F_k) \leq \sum_{i=k}^{\infty} \mu(E_k) < 2^{-(k-1)}$$

para todo k tenemos que $\mu(F) = 0$ pues $\mu(F) = \lim_{k\to\infty} \mu(F_k) = 0$.

Como $f_n \to f$ uniformemente en $\Omega \setminus E_k$ y como $E_k \subset F_k$ tenemos $f_n \to f$ uniformemente en $\Omega \setminus F_k$ y por lo tanto $f_n(x) \to f(x)$ en todo $x \notin F_k$. Podemos asegurar entonces que si $x \notin F_k$ para todo k, $f_n(x) \to f(x)$ y por lo tanto $f_n \to f$ c.t.p.. □

Proposición 3.2.6 *Si una sucesión converge casi uniformemente a f entonces converge en medida.*

Demostración. Como $f_n \to f$ casi uniformemente dado $\varepsilon > 0$ existe $E_\varepsilon \subset \Omega$ con $\mu(E_\varepsilon) < \varepsilon$ y $f_n \to f$ uniformemente en $\Omega \setminus E_\varepsilon$. Por lo tanto para todo $\alpha > 0$ si n suficientemente grande

$$E_n(\alpha) = \{x \in \Omega \ : \ |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\}$$

está contenido en E_ε. Luego $\mu(E_n(\alpha)) < \mu(E_\varepsilon) < \varepsilon$, y así $f_n \to f$ en medida. □

El último teorema de esta sección es el Teorema de Egoroff, el cual añadirá mas relaciones entre los diferentes tipos de convergencia cuando se trata de espacios de medida finita, como el caso muy usado de las medidas de probabilidad.

Teorema 3.2.2 (Egoroff) *Suponga que $\mu(\Omega) < \infty$ y que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones medibles, reales que convergen casi todo punto a la función f medible y real. Entonces existe la sucesión converge casi uniformemente y en medida a f.*

Demostración. Observe que debido a la proposición anterior solo es necesario mostrar que la f_k converge casi uniformemente a f.

Suponga que $f_n \to f$ en todo punto del conjunto $\Omega \setminus R$ con $\mu(R) = 0$. Si $m, n \in \mathbb{N}$ defina

$$E_n(m) = \bigcup_{k=n}^{\infty} \left\{ x \in \Omega \ : \ |f_k(x) - f(x)| \geq \frac{1}{m} \right\} .$$

Tenemos que los $E_n(m)$ son medibles y $E_{n+1} \subset E_n(m)$ y como $f_n(x) \to f(x)$ para todo $x \notin R$, entonces

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n(m) \subset R .$$

Luego, como $\mu(\Omega) < \infty$, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \mu(E_n(m)) = \mu \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n(m) \right) = 0 \, ; \text{ para todo } m \in \mathbb{N} .$$

Por lo tanto dado $\delta > 0$ se puede escoger para cada m un k_m de modo que $\mu(E_{k_m}(m)) < \frac{\delta}{2^m}$. Así, tomando $E_\delta = \cup_{m=1}^{\infty} E_{k_m}(m)$ tendremos que $\mu(E_\delta) < \delta$.

Ahora, si $x \notin E_\delta$ se tiene que $x \notin E_{k_m}$ luego $|f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{m}$ para todo $k > k_m$, demostrando así que f_k es uniformemente convergente en $\Omega \setminus E_\delta$. $\square$

Ejercicios

3.1 Demuestre la desigualdad

$$\left| \int_A (f_n - f) \, dm \right| \leq \int_A |f_n - f| \, dm .$$

3.2 Sean $f, g : \Omega \to [-\infty, \infty]$ funciones medibles, pruebe que los conjuntos

$$\{x \in \Omega \ : \ f(x) < g(x)\} \qquad \text{y} \qquad \{x \in \Omega \ : \ f(x) = g(x)\}$$

son medibles.

3.3 Sean A y B dos subconjuntos medibles de $\mathbb{R}$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función integrable Lebesgue. Pruebe que

$$\int_B f dm = \int_A (\chi_B f) dm.$$

3.4 Considere la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{sen} x$. Pruebe que f no es integrable sobre $[0, \infty]$

3.5 Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ y defina $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ como $f(0) = 0$ y $f(x) = x^\alpha \operatorname{sen}(x^\beta)$ cuando $x \in [0,1]$. ¿Para qué valores de α resulta f ser integrable Lebesgue sobre $[0,1]$.

3.6 Diga si las afirmaciones siguientes son verdaderas y justifique su respuesta.

(a) Existen funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que no son medibles.

(b) Si la suma de dos funciones es una función medible, entonces cada una de ellas es medible.

Capítulo 4

Descomposición de Medidas y el Teorema de Radón-Nikodym

Dado un espacio medible $(\Omega, \mathcal{A})$ el conjunto de medidas que se pueden definir en él es vasto. Es por eso importante ver las relaciones que pueden ocurrir entre medidas diferentes en el mismo espacio medible.

Decimos que una medida λ en Ω es `absolutamente continua` respecto de μ en $\mathcal{A}$ si para todo conjunto medible $E \subset \Omega$ con $\mu(E) = 0$ se tiene que $\lambda(E) = 0$. En este caso escribimos $\lambda << \mu$.

Como ejemplo podemos anotar lo siguiente: Si tenemos una medida μ definida en $\mathcal{A}$ y una función f **positiva** e integrable con respecto a la medida μ, es fácil ver que definiendo $\lambda(A) = \int_A f d\mu$ obtenemos una medida λ definida en la misma σ-álgebra que μ y por las propiedades de la integral se tiene que si A satisface $\mu(A) = 0$ entonces $\lambda(A) = 0$ con lo que $\lambda << \mu$. En un caso como éste se dice que la función f `representa` a la medida μ.

En el otro extremo tenemos la noción de medidas singulares. Diremos dos medidas λ y μ en Ω son `mutuamente singulares` si existen conjunto medibles $A, B \subset \Omega$ tales que $\Omega = A \cup B$ y $\lambda(A) = \mu(B) = 0$. En este caso escribimos $\lambda \perp \mu$. Aunque claramente la definición es simétrica también es usual decir que λ es singular respecto de μ.

Como ejemplo de esta situación podemos dar la medida de Lebesgue m en el intervalo $I = [0, 1]$ y la medida δ concentrada λ en el punto $p = \frac{1}{2}$. Recordemos que $\lambda(E) = 0$ si $p \notin A$ y $\lambda(E) = 1$ si $p \in E$. Tenemos que $\delta \perp m$ pues podemos tomar $A = I \setminus \{p\}$ y $B = \{p\}$ y tenemos $\delta(A) = m(B) = 0$.

Nuestro objetivo sera probar versiones simplificadas del Teorema de Radon-Nikodym y del Teorema de descomposición de Lebesgue. Una de las simplificaciones consiste en que nos restringiremos a medidas finitas, pero los teoremas valen para espacios de medida σ-finitos. Un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ es `σ-finito` si Ω es unión numerable de conjuntos con medida finita.

4.1 Medidas con Signo

Dado un espacio medible $(\Omega, \mathcal{A})$, decimos que la función $\mu : \mathcal{A} \to R$ es una `medida real` (o también `medida con signo`), si $\mu(\emptyset) = 0$ y es contablemente aditiva, esto es

$$\mu\left(\biguplus_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) \tag{4.1}$$

para cualquier colección disjunta de conjuntos medibles E_k en Ω.

Observe que de la definición se tiene que $\mu(\Omega) < \infty$, más aún, $\mu(E) < \infty$ para cualquier conjunto medible E. Esto implica que la serie en el lado derecho de la ecuación 4.1 es absolutamente convergente.

Un subconjunto P de Ω es denominado `conjunto positivo` de la medida real μ si para todo conjunto medible E se tiene $\mu(E \cap P) \geq 0$. Similarmente un conjunto N de Ω se denomina `negativo` si $\mu(E \cap N) \leq 0$ para todo E medible.

Teorema 4.1.1 (Descomposición de Hahn) *Si λ es una medida real, entonces existen conjuntos P y N en Ω tal que $\Omega = P \cup N$, $P \cap N = \emptyset$, y tal que P es positivo y N es negativo respecto de λ.*

Demostración. Considere la clase $\mathcal{P}$ de todos los conjuntos positivos, esta clase es no vacía pues el conjunto $\emptyset$ está en ella. Tome $\alpha = \sup\{\lambda(A) \ : \ A \in$

$\mathcal{P}\}$ y una sucesión $\{A_n\}$ de conjuntos en $\mathcal{P}$ que aproxime este supremo, i.e. $\lim \lambda(A_n) = \alpha$. Podemos definir ahora $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y como la unión de dos conjuntos positivos es positivo, podemos tomar la sucesión A_n como una sucesión creciente de modo que

$$\lambda(E \cap P) = \lambda(E \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} E \cap A_n) = \lim \lambda(E \cap A_n) \geq 0$$

lo que demuestra que P es un conjunto positivo y además con la propiedad que $\lim \lambda(A_n) = \mu(P) = \alpha < \infty$.

Sólo queda por demostrar que el conjunto $N = \Omega \setminus P$ es un conjunto negativo. Si no lo fuera, existe un subconjunto E de N con $\lambda(E) > 0$. El conjunto E no puede ser positivo pues si hacemos $P \cup E$ obtendríamos un conjunto positivo con medida estrictamente mayor que α, lo que contradice la definición de α. Por lo tanto E contiene un conjunto E_1 medible tal que $\lambda(E_1) \leq -1/n_1$.

Como $\lambda(E) = \lambda(E_1 \cup E \setminus E_1) = \lambda(E_1) + \lambda(E \setminus E_1)$ tenemos que

$$\lambda(E \setminus E_1) = \lambda(E) - \lambda(E_1) > \lambda(E) > 0\,.$$

Otra vez, $E \setminus E_1$ no puede ser positivo por un argumento análogo al mencionado para E. Por lo que $E \setminus E_1$ contiene conjuntos con λ-medida negativa. Tome n_2 el menor numero natural tal que $E \setminus E_1$ contiene un conjunto E_2 con medida $\lambda(E_2) \leq -1/n_2$. Como antes $E \setminus (E_1 \cup E_2)$ no puede ser positivo y se tomamos n_3 el menor entero tal que $E \setminus (E_1 \cup E_2)$ contiene un conjunto E_3 con $\lambda(E_3) \leq -1/n_3$. Repitiendo este argumento obtenemos un sucesión (E_k) de conjuntos medibles tales que $\lambda(E_k) \leq -1/n_k$.

Ahora hacemos $F = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ de modo que

$$\lambda(F) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(E_k) \leq -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} \leq 0$$

lo que nos da que necesariamente $1/n_k \to 0$. Si G es un subconjunto medible de $E \setminus F$ con $\lambda(G) < 0$, entonces existe un n_k de modo que $\lambda(G) < -1/(n_k - 1)$ para un k suficientemente grande. Pero como $G \subset E \setminus (E_1 \cup \cdots \cup E_k)$ tenemos una contradicción pues n_k debería ser el menor natural tal que $E \setminus (E_1 \cup \cdots \cup E_k)$ contiene un conjunto con medida menor que $-1/n_k$.

De este modo, todo subconjunto G de $E \setminus F$ debe satisfacer $\lambda(G) \geq 0$, lo que indicaría que $E \setminus F$ es positivo para λ. Como $\lambda(E \setminus F) = \lambda(E) - \lambda(F)$, tendríamos que $P \uplus (E \setminus F)$ es un conjunto positivo y con medida mayor que α, lo cual es una contradicción.

Sigue que el conjunto $N = \Omega \setminus P$ es negativo para λ y ya tenemos la descomposición requerida. □

Los conjuntos P y N se denominan una `descomposición de Hahn` de Ω con respecto a la medida real λ. En general dicha descomposición no es única, pero esto no causa mayor inconveniente pues se puede demostrar que los diferentes descomposiciones difieren por conjuntos con medida nula.

4.2 El Teorema de Radon-Nikodym

Diremos que la función integrable f `representa` a la medida λ si

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu, \qquad E \in \mathcal{A}, \tag{4.2}$$

Teorema 4.2.1 (Radon-Nikodym) *Sean λ y μ medidas finitas en el espacio medible $(\Omega, \mathcal{A})$ y suponga que $\lambda << \mu$. Entonces existe una función integrable positiva definida en Ω tal que f representa a λ. Más aún Si existe otra función g que representa a λ se tiene que $f = g$ en casi todo punto.*

Demostración. Dado $c > 0$ denotemos por $P(c)$ y $N(c)$ la descomposición de Hahn de la medida real $\lambda - c\mu$. Si $k \in \mathbb{N}$, consideremos los conjuntos medibles

$$A_1 = N(c), \qquad A_{k+1} = N((k+1)c) \setminus \bigcup_{j=1}^{k} A_j \,.$$

Observe que los A_k son disjuntos y que $\bigcup_{j=1}^{k} N(jc) = \biguplus_{j=1}^{k} A_j$.

Se tiene entonces que $A_k = N(kc) \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} N(jc) = N(kc) \bigcap_{j=1}^{k-1} P(jc)$. y por consiguiente, si E es un conjunto medible de A_k, entonces $E \subset N(kc)$ y $E \subset P((k-1)c)$ con lo que

$$\lambda(E) - kc\mu(E) \leq 0 \;\text{ y }\; \lambda(E) - (k-1)c\mu(E) \geq 0 \,.$$

Por lo tanto

$$(k-1)c\mu(E) \leq \lambda(E) \leq kc\mu(E). \tag{4.3}$$

Defina ahora $B = \Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcap_{j=1}^{i} nftyP(jc)$, de modo que $B \subset P(kc)$ para todo k. Esto implica

$$0 \leq kc\mu(B) \leq \lambda(B) \leq \lambda(\Omega) < \infty, \qquad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Siendo así $\mu(B)$ tiene que tener medida nula, y como $\lambda << \mu$ también se tiene $\lambda(B) = 0$. Observe también que B es disjunto de todos los A_k y que $B \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \Omega$.

Ahora estamos en condiciones de comenzar a buscar la función integrable f solicitada en el teorema.

Para cada $c > 0$ de la construcción anterior podemos definir

$$f_c(x) = \begin{cases} (k-1)c & \text{si } x \in A_k \\ 0 & \text{si } x \in B\,. \end{cases}$$

Ahora, si E es un conjunto medible cualquiera puede ser escrito como unión disjunta de conjuntos del tipo $E \cap B$ y $E \cap A_k$, $k \in \mathbb{N}$, de modo que usando la ecuación 4.3 tenemos

$$\int_E f_c d\mu \leq \lambda(E) \leq \int_E (f_c + c) d\mu \leq \int_E f_c d\mu + c\mu(\Omega).$$

Ahora formamos una sucesión de funciones tomando $c = 2^{-n}$ para $n \in \mathbb{N}$, y las denotamos f_n. Siendo así, las funciones f_n satisfacen

$$\int_E f_n d\mu \leq \lambda(E) \leq \int_E f_n d\mu + 2^{-n}\mu(\Omega) \tag{4.4}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Dicho de otro modo, se cumple que

$$\int_E f_n d\mu \leq \lambda(E) \qquad \text{y} \qquad \lambda(E) \leq \int_E f_m d\mu + 2^{-m}\mu(\Omega)$$

para cualquier medible E y todo $m, n \in \mathbb{N}$. Con esta información, y suponiendo que $m \geq n$, es fácil ver que

$$\left| \int_E (f_n - f_m) d\mu \right| \leq 2^{-n}\mu(\Omega)$$

para cualquier medible E. Escogiendo en cada caso $E^+_{n,m} = \{x \in \Omega : (f_n(x) - f_m(x)) \geq 0\}$ y $E^-_{n,m} = \{x \in \Omega : (f_n(x) - f_m(x)) < 0\}$, obtenemos

$$\left| \int_{E^+_{n,m}} (f_n - f_m) d\mu \right| = \int_\Omega (f_n - f_m)^+ d\mu \leq 2^{-n}\mu(\Omega)$$

Donde, como antes, $(f_n - f_m)^+$ denota la función parte positiva de $f_n - f_m$. Similarmente

$$\left| \int_{E^-_{n,m}} (f_n - f_m) d\mu \right| = \int_\Omega (f_n - f_m)^- d\mu \leq 2^{-n}\mu(\Omega).$$

De modo que

$$\int_\Omega |f_n - f_m| d\mu \leq 2 \cdot 2^{-n}\mu(\Omega)$$

Esto significa que la sucesión $\{f_n\}$ es de Cauchy en media, y por lo tanto converge en media a una función positiva f. También,

$$\left| \int_E f_n d\mu - \int_E f d\mu \right| \leq \int_E |f_n - f| d\mu \leq \int |f_n - f| d\mu,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, que junto con la ecuación 4.4 quiere decir que

$$\lambda(E) = \lim \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu,$$

para todo E medible, y por lo tanto f es la función buscada.

Supongamos ahora que existen dos funciones f y g que representan a λ respecto de μ, esto es

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu = \int_E g d\mu,$$

para todo E medible. Podemos escoger entonces $E_1 = \{x \in \Omega : f(x) > g(x)\}$ y $E_2 = \{x \in \Omega : g(x) > f(x)\}$ y aplicando la Proposición 2.4.3 obtenemos $f = g$ c.t.p.. $\square$

Teorema 4.2.2 (Descomposición de Lebesgue) *Sean λ y μ medidas finitas en un σ-álgebra $\mathcal{A}$. Entonces existe una medida λ_1 que es singular respecto de μ y una medida λ_2 que es absolutamente continua respecto de μ y tal que $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. Mas aún, las medidas λ_1 y λ_2 son únicas.*

Demostración. Defina $\nu = \lambda + \mu$ de modo que ν también es una medida finita. De esta definición también se tiene que tanto λ como μ son absolutamente continuas respecto de ν de modo que el Teorema de Radón-Nikodym implica que existen funciones positivas f y g tales que representan a λ y μ respecto de ν, esto es:

$$\lambda(E) = \int_E f d\nu, \qquad \mu(E) = \int_E g d\nu$$

para todo medible E. Sean $A = \{x \in \Omega \ : \ g(x) = 0\}$, y $B = \{x \in \Omega \ : \ g(x) > 0\}$ de tal forma que $A \cap B = \emptyset$, y $\Omega = A \cup B$.

Definamos ahora dos medidas λ_1 y λ_2 de la siguiente forma

$$\lambda_1(E) = \lambda(E \cap A) \qquad \lambda_2(E) = \lambda(E \cap B)\,,$$

para todo E medible. Queda claro entonces que $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

Veamos que $\lambda_1 \perp \mu$. En efecto, tenemos que $\mu(A) = \int_A g d\nu = 0$ pues g es idénticamente nula en A y $\lambda_1(B) = \lambda(B \cap A) = 0$ pues $A \cap B = \emptyset$.

Veamos ahora que $\lambda_2 << \mu$. Si $\mu(E) = 0$ se tiene que $\int_E g d\nu = 0$, de modo que $g(x) = 0$ para $\nu -$ c.t.p. $x \in E$. Entonces, $\nu(E \cap B) = 0$ lo que implica $\lambda(E \cap B) = 0$ pues $\lambda << \nu$. Esto último es lo mismo que $\lambda_2(E) = \lambda(E \cap B) = 0$, implicando que $\lambda_2 << \mu$.

Ahora sólo falta la unicidad de esta descomposición. Vamos a usar el hecho de que si α es una medida satisfaciendo $\alpha << \mu$ y $\alpha \perp \mu$ entonces $\alpha = 0$. La prueba de esta afirmación la dejamos como ejercicio.

Ahora bien, suponga que existan dos descomposiciones para $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = \gamma_1 + \gamma_2$, donde λ_i y γ_i, $i = 1, 2$, son medidas satisfaciendo $\lambda_1 \perp \mu$, $\lambda_2 << \mu$, $\gamma_1 \perp \mu$ y $\gamma_2 << \mu$.

Tenemos que $\lambda_1 - \gamma_1 = \gamma_2 - \lambda_2$ es una medida con signo y consideramos P y N la descomposición de Hahn de esa medida. Defina $h^+(E) = (\lambda_1 - \gamma_1)(E \cap P) = (\gamma_2 - \lambda_2)(E \cap P)$, de modo que h^+ es una medida positiva (vea el Ejercicio 4.2) y tal que $h^+ \perp \mu$ y $h^+ << \mu$, de modo que $h^+(E) = 0$ para todo E medible. Similarmente, si definimos $h^-(E) = (\lambda_1 - \gamma_1)(E \cap N) = (\gamma_2 - \lambda_2)(E \cap N)$, obtenemos que $h^-(E) = 0$ para todo E medible.

Juntando estas relaciones tenemos que para todo E medible

$$\begin{aligned} 0 &= h^+(E) + h^-(E) = (\lambda_1 - \gamma_1)(E \cap P) + (\lambda_1 - \gamma_1)(E \cap N) \\ &= (\lambda_1 - \gamma_1)(E) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (\gamma_2 - \lambda_2)(E) \\ &= (\gamma_2 - \lambda_2)(E \cap P) + (\gamma_2 - \lambda_2)(E \cap N) = h^+(E) + h^-(E) = 0\,, \end{aligned}$$

lo que indica que $\lambda_1 = \gamma_1$ y $\gamma_2 = \lambda_2$. □

Ejercicios

4.1 Si P_1 and P_2 son conjuntos positivos para una medida con signo λ entonces $P_1 \cup P_2$ también es un conjunto positivo para la misma medida.

4.2 Si P es un conjunto positivo de la medida real ν entonces

$$\nu^+(E) = \nu(E \cap P)$$

define ν^+ como una medida (positiva) sobre la misma σ-álgebra.

4.3 Demuestre que si $\lambda_1 << \mu$ y $\lambda_2 << \mu$ entonces $\lambda_1 + \lambda_2 << \mu$.

4.4 Demuestre que si $\lambda_1 << \mu$ y $\lambda_2 \perp \mu$ entonces $\lambda_1 \perp \lambda_2$.

4.5 Demuestre que si $\lambda << \mu$ y $\lambda \perp \mu$ entonces $\lambda = 0$.

4.6 Sean λ y μ medidas σ-finitas en en el espacio medible $(\Omega, \mathcal{A})$, y tales que $\lambda << \mu$. Si f es la función dada por el teorema de Radón-Nikodym, entonces pra toda función no negativa definida en Ω, se tiene

$$\int g d\lambda = \int g f d\mu.$$

4.7 Demostrar que si tenemos dos medidas, μ y λ, satisfaciendo $\mu << \lambda$ y $\lambda << \mu$ entonces existe una función g tal que si $E = \{x \in \Omega : g(x) \neq 0\}$ se tiene

$$\mu(A) = \int_{A \cap E} g d\lambda \qquad \text{y} \qquad \lambda(A) = \int_{A \cap E} \frac{1}{g} d\mu,$$

para todo A medible.

Capítulo 5

Medidas Producto y el Teorema de Fubini

El objetivo principal de este capítulo es demostrar el Teorema de Fubini, el cual es de suma importancia para la evaluación de integrales de funciones definidas en espacios medibles generados por el producto de espacios medibles. El modelo que uno debe tener presente es una construcción del espacio medible $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Es por eso necesario dar las definiciones y algunos resultados de los espacios producto.

5.1 Espacios Producto

Si tenemos dos espacios medibles $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ al producto cartesiano de $A_1 \times A_2$ con $A_i \in \mathcal{A}_i$, $i = 1, 2$, le llamaremos un `rectángulo medible` del espacio producto $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$. Las uniones finitas de rectángulos medibles será denotada por $\mathcal{A}_0$ y es usualmente llamada la clase de los conjuntos elementales.

Definimos como $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ como la menor σ-álgebra en $\Omega_1 \times \Omega_2$ que contiene todos los rectángulos medibles.

Una `clase monótona` $\mathcal{M}$ es una colección de conjuntos tales que

- Si $E_i \in \mathcal{M}$, $E_i \subset E_{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{N}$ entonces $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{M}$.

- Si $E_i \in \mathcal{M}$, $E_i \supset E_{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{N}$ entonces $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{M}$.

Dado un conjunto $E \subset \Omega_1 \times \Omega_2$ y puntos $x \in \Omega_1$ e $y \in \Omega_2$, definimos la `sección` x como $E_x = \{y \in \Omega_2 \ : \ (x,y) \in E\}$ la `sección` y como $E_y = \{x \in \Omega_1 \ : \ (x,y) \in E\}$. Es evidente de la definición que $E_x \in \Omega_2$ y $E_y \subset \Omega_1$.

Proposición 5.1.1 *Si $E \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ entonces $E_x \in \mathcal{A}_2$ y $E_y \in \mathcal{A}_1$, para todo $x \in \Omega_1$ e $y \in \Omega_2$.*

Demostración. Consider la clase de conjuntos siguiente

$$\mathcal{B} = \{E \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \ : \ E_x \in \mathcal{A}_2 \ \text{ para todo } \ x \in \Omega_1\}.$$

Si $E = A_1 \times A_2$, es fácil ver que $E_x = B$ cuando $x \in A_1$ y $E_x = \emptyset$ si $x \notin A_1$, y por lo tanto $E \in \mathcal{B}$. Esto es, $\mathcal{B}$ es una clase de conjuntos que contiene a los rectángulos elementales. Además, no es difícil mostrar que se satisfacen las siguientes propiedades:

(a) $\Omega_1 \times \Omega_2 \in \mathcal{B}$.

(b) Si $E \in \mathcal{B}$ entonces $(E^c)_x = (E_x)^c \in \mathcal{A}_2$ para todo $x \in \Omega_1$ y por lo tanto $E^c \in \mathcal{B}$.

(c) Si $E_i \in \mathcal{B}$, y $E = \bigcup_{i=1}^{\infty}$ entonces $E_x = \bigcup_{i=1}^{\infty}(E_i)_x \in \mathcal{A}_2$ para todo x y por lo tanto $E \in \mathcal{B}$.

Con estas tres propiedades la clase $\mathcal{B}$ es una σ-álgebra y contiene a los rectángulos medibles, por lo tanto $\mathcal{B} = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$. Es decir para todo E medible se tiene que E_x es medible. Un procedimiento similar demuestra la propiedad para la sección E_y. $\square$

Teorema 5.1.1 *La σ-álgebra $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ es la menor clase monotónica que contiene a todos los conjuntos elementales.*

Demostración. Llamemos $\mathcal{B}$ a la menor clase monotónica que contiene a $\mathcal{A}_0$, los conjuntos elementales, esto es la menor clase monotónica tal que $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{B}$. Para probar el teorema debemos probar que $\mathcal{B} = \mathcal{A}_1 \times A_2$. Para esto, observe que como $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ también es una clase monotónica que contiene los elementales entonces $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}_1 \times A_2$. Para demostrar que $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{B}$ bastará mostrar que $\mathcal{B}$ es un σ-álgebra pues ya contiene a los rectángulos medibles.

Dejamos al lector el ejercicio de demostrar que la intersección de dos rectángulos es un rectángulo y que la diferencia de rectángulos es la unión disjunta de una cantidad finita de rectángulos[1]. Por consiguiente si P y Q son conjuntos elementales, entonces también son elementales los conjuntos $P \cap Q$ y $P \setminus Q$ y como $P \cup Q = (P \setminus Q) \cup Q$ también tenemos que $P \cup Q$ es elemental.

Defina para cualquier conjunto $P \in \Omega_1 \times \Omega_2$ el conjunto $\mathcal{H}(P)$ como

$$\mathcal{H}(P) = \{Q \subset \Omega_1 \times \Omega_2 \ : \ P \setminus Q \in \mathcal{B}, Q \setminus P \in \mathcal{B}, P \cup Q \in \mathcal{B}\}$$

Nuestro primer afirmación es que si $Q \in \mathcal{B}$ entonces $\mathcal{B} \subset \mathcal{H}(Q)$.

Para esto describamos primero dos propiedades simples de $\mathcal{H}(P)$.

(a) $Q \in \mathcal{H}(P)$ si y solamente si $P \in \mathcal{H}(Q)$.

(b) Como $\mathcal{B}$ es una clase monotónica, $\mathcal{H}(P)$ también lo es.

Ahora, fije $P \in \mathcal{A}_0$ un conjunto elemental. De las propiedades de los conjuntos elementales es fácil ver que $Q \in \mathcal{H}(P)$ para todo Q elemental. Esto es $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{H}(P)$ si P es elemental y como $\mathcal{H}(P)$ es una clase monotónica se tiene que $\mathcal{B} \subset \mathcal{H}(P)$ para todo $P \in \mathcal{A}_0$. Pero si fijamos $Q \in \mathcal{B}$ lo que probamos es que $Q \in \mathcal{H}(P)$ para todo P elemental, lo que por la propiedad (a) dice que $P \in \mathcal{H}(Q)$ para todo P elemental. Nuevamente, entonces, $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{H}(Q)$ y así $\mathcal{B} \subset \mathcal{H}(Q)$ para todo $Q \in \mathcal{B}$, demostrando la afirmación.

Usando la afirmación precedente tenemos que si P y Q están en $\mathcal{B}$ entonces $P \setminus Q$ y $P \cup Q$ están en $\mathcal{B}$.

Ahora sí veamos que $\mathcal{B}$ es una σ-álgebra.

- Se tiene que $A_1 \times A_2 \in \mathcal{A}_0$ y por lo tanto $A_1 \times A_2 \in \mathcal{B}$.
- Si $Q \in \mathcal{B}$ entonces $Q^c = A_1 \times A_2 \setminus Q \in \mathcal{B}$.
- Si $P_i \in \mathcal{B}$ y $P = \bigcup_{i=1}^{\infty}$, entonces $Q_n = \bigcup_{i=1}^{n} P_i$ está en $\mathcal{B}$ y de esta manera $P = \bigcup Q_n \in \mathcal{B}$ de la definición de clase monótona.

[1] Observe que una afirmación similar cumplen los intervalos en la recta.

Concluyendo, como $\mathcal{B}$ es una σ-álgebra que contiene a los elementales entonces $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{B}$ y como $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$, pues $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ también es una clase monótona que contiene a los elementales, tenemos finalmente, que $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 = \mathcal{B}$. $\square$

Para cada función $f : A_1 \times A_2 \to \mathbb{R}$ y cada $x \in A_1$ definimos $f_x : A_2 \to \mathbb{R}$ tal que $f_x(y) = f(x, y)$. De modo similar f^y es la función definida en A_2 tal que $f^y(x) = f(x, y)$.

Teorema 5.1.2 *Sea f una función $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$-medible en $\Omega_1 \times \Omega_2$ entonces:*

(i) *Para todo $x \in \Omega_1$, f_x es $\mathcal{A}_2$-medible.*

(ii) *Para todo $y \in \Omega_2$, f^y es $\mathcal{A}_1$-medible.*

Demostración. De la definición de que f es medible se tiene que para todo abierto $V \subset \mathbb{R}$ el conjunto $Q = \{(x, y) \ : \ f(x, y) \in V\} = f^{-1}(V)$ es medible. Usando la Proposición 5.1.1 se tiene que

$$\begin{aligned} Q_x &= \{y \ : \ (x, y) \in Q\} = \{y \ : \ f(x, y) \in V\} = \\ &= \{y \ : \ f_x(y) \in V\} = (f_x)^{-1}(V) \end{aligned}$$

es medible y por consiguiente f_x es una función $\mathcal{A}_2$-medible. Usando un argumento similar se demuestra que f^y es una función $\mathcal{A}_1$-medible. $\square$

5.2 Medidas Producto

El teorema siguiente es la base para la definición de medida producto, como se podrá apreciar posteriormente. Lo que dice es que dada una función característica medible en un espacio producto, podemos cambiar el orden de integración y obtendremos el mismo resultado.

Teorema 5.2.1 *Sean $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu)$ y $\Omega_2, \mathcal{A}_2, \lambda)$ dos espacios de medida σ-finito. Dado $Q \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ defina*

$$\varphi(x) = \lambda(Q_x) \quad y \quad \psi(y) = \mu(Q^y), \tag{5.1}$$

para cada $x \in \Omega_1$ e $y \in \Omega_2$. En estas condiciones φ es $\mathcal{A}_1$-medible, ψ es $\mathcal{A}_2$-medible y

$$\int_{\Omega_1} \varphi d\mu = \int_{\Omega_2} \psi d\lambda. \tag{5.2}$$

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ clase de conjuntos $Q \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ para los cuales la conclusión del teorema se cumple. Queremos mostrar que la conclusión del teorema vale para todos lo medibles, es decir queremos mostrar que $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$. Para esto primero veamos que se cumplen las siguientes propiedades.

(a) Todo rectángulo medible está en $\mathcal{A}$.

(b) Si $Q_1 \subset Q_2 \subset \cdots$, y si cada Q_i está en A entonces el conjunto $Q = \cup Q_i$ está en $\mathcal{A}$.

(c) Si (Q_i) es una colección disjunta numerable de conjuntos de $\mathcal{A}$ entonces el conjunto $Q = \cup Q_i$ está en $\mathcal{A}$.

(d) Si $\mu(A) < \infty$, $\lambda(B) < \infty$, y $A \times B \supset Q_1 \supset Q_2 \supset \cdots$, con todos los Q_i en $\mathcal{A}$ entonces el conjunto $Q = \cap Q_i$ está en $\mathcal{A}$.

PARTE (a) Si $Q = A \times B$ es un rectángulo medible, entonces

$$\lambda(Q_x) = \lambda(B)\xi_A(x) \ \text{ y } \ \mu(Q^y) = \mu(A)\xi_B(x)$$

y así las integrales en (5.2) son ambas iguales a $\mu(A)\lambda(B)$, lo que demuestra la parte (a).

PARTE (b) Sean φ_i y ψ_i las funciones asociadas (como en el enunciado del teorema) a Q_i. La propiedad de las medidas μ y λ muestra que

$$\lim \varphi_i(x) = \varphi(x), \qquad \lim \psi_i(y) = \psi(y)$$

siendo la convergencia monótona creciente en cada punto. Del Teorema de la Convergencia Monónota, tenemos que

$$\int \psi d\lambda = \lim \int \psi_i d\lambda = \lim \int \varphi_i d\mu = \int \varphi d\mu.$$

PARTE (c) Para unión finita disjunta desde Q_1 hasta Q_N es fácil de demostrar pues $\chi_{Q_1 \uplus Q_2 \cdots \uplus Q_n} = \chi_{Q_1} + \chi_{Q_2} \cdots + \chi_{Q_N}$ de modo que

$$\int_{\Omega_1} d\mu(x) \int_{\Omega_2} \chi_{Q_1 \uplus Q_2 \cdots \uplus Q_n} d\lambda(y) = \int_{\Omega_1} d\mu(x) \int_{\Omega_2} (\chi_{Q_1} + \cdots + \chi_{Q_N}) d\lambda(y) =$$

$$= \int (\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_N) d\mu(x) = \int (\psi_1 + \psi_2 + \cdots + \psi_N) d\lambda(y)$$

$$= \int_{\Omega_2} d\lambda \int_{\Omega_1} \chi_{Q_1 \uplus Q_2 \cdots \uplus Q_n} d\mu(x)$$

Por lo tanto se cumple para la sucesión creciente $\tilde{Q}_N = \bigcup_{i=1}^{N} Q_i$. Siendo así, podemos usar la parte (b) para ver que también se cumple para el conjunto $Q = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i = \bigcup_{N=1}^{\infty} \tilde{Q}_N$.

PARTE (d) Es similar a la parte (b) sólo que esta vez debemos usar el Teorema de la Convergencia Dominada, lo cual es posible debido a que $\mu(A) < \infty$ y $\lambda(B) < \infty$.

Siguiendo con la demostración del teorema. Como los espacios de medida son σ-finitos tenemos que $\Omega_1 = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, donde los conjuntos E_i forman una colección eneumerable disjunta de conjuntos medibles con medida finita y $\Omega_2 = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j$, donde los conjuntos F_j, son conjuntos disjuntos, medibles, con medida finita.

Defina $Q_{m,n} = Q \cap (E_m \times F_n)$ para cada $m, n \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{M}$ la clase de los $Q \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ tales que $Q_{m,n} \in \mathcal{A}$ para todo m, n. Tenemos lo siguiente:

- Las afirmaciones (b) y (d) anteriores, dicen que $\mathcal{M}$ es una clase monótona.
- las afirmaciones (a) y (c) dicen que los conjuntos elementales están en $\mathcal{M}$.

De la definición tenemos que $\mathcal{M} \subset \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ y como los hechos anteriores junto con el Teorema 5.1.1 implican que $\mathcal{M} \supset \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ obtenemos que $\mathcal{M} = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$.

Hasta aquí, hemos demostrado que para todo $Q \in \mathcal{A}_\times \mathcal{A}_2$ los conjuntos $Q_{m,n}$ están en $\mathcal{A}$. A partir de aquí, y considerando que Q es unión de conjuntos disjuntos, todos en $\mathcal{A}$, usamos la parte (c) para concluir que $Q \in \mathcal{A}$, lo que completa la prueba. $\square$

A la luz de este teorema podemos definir la `medida en el espacio producto` $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$ como

$$(\mu \times \lambda)(Q) = \int_{\Omega_1} \lambda(Q_x) d\mu(x) = \int_{\Omega_2} \mu(Q^y) d\lambda(y) \ .$$

A $\mu \times \lambda$ le llamamos el `producto` de de las medida μ y λ. El hecho de que $\mu \times \lambda$ es una medida viene de las propiedades básicas de la integración y observe que también la medida $\mu \times \lambda$ es σ-finita.

5.3 El Teorema de Fubini

Teorema 5.3.1 *Sean* $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu)$ *y* $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \lambda)$ *espacios de medida* σ*-finitos, y* f *una función* $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$*-medible en* $\Omega_1 \times \Omega_2$*.*

(a) *Si* $0 \leq f \leq \infty$*, y si*

$$\varphi(x) = \int_{\Omega_2} f_x d\lambda, \qquad \psi(y) = \int_{\Omega_1} f^y d\mu, \qquad (x \in \Omega_1, y \in \Omega_2). \tag{5.3}$$

entonces φ *es* $\mathcal{A}_1$*-medible,* ψ *es* $\mathcal{A}_2$*-medible y*

$$\int_{\Omega_1} \varphi d\mu = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f d(\mu \times \lambda) = \int_{\Omega_2} \psi d\lambda \tag{5.4}$$

(b) *Si* f *es una función real* $\Omega_1 \times \Omega_2$*-integrable entonces*

- f_x *es* λ*-integrable para* μ*-casi todo* $x \in \Omega_1$*,*
- f^y *es* μ*-integrable para* λ*-casi todo* $y \in \Omega_2$*,*
- φ*, que está definida* μ*-* c.t.p. *, es* μ*-integrable,*
- ψ*, que está definida* λ*-* c.t.p. *, es* λ*-integrable.*

Más aún, se cumple la ecuación (5.4).

Demostración. El teorema anterior implica que la parte (a) vale cuando $f = \chi_Q$ es una función característica medible. Por linealidad de la integral también vale para funciones simples.

Ahora, si f es un función no negativa, entonces existe una sucesión monótona de funciones simples que tales que $s_n \nearrow f$ entonces por el Teorema de la Convergencia Monótona, se tiene que

$$\int_{\Omega_1} \varphi_n d\mu = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} s_n d(\mu \times \lambda) = \int_{\Omega_2} \psi_n d\lambda$$

vale para todo n y por lo tanto también en el límite, i.e.

$$\int_{\Omega_1} \varphi d\mu = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f d(\mu \times \lambda) = \int_{\Omega_2} \psi d\lambda \,,$$

donde φ_n y ψ_n están asociados a s_n del mismo modo en que φ y ψ están asociados a f. Lo que demuestra la parte (a).

Para probar la parte (b) descomponga f en su parte positiva y su parte negativa, esto es $f = f^+ - f^-$, de modo que $|f| = f^+ + f^-$. Asociemos φ_1 a f^+ del mismo modo en que φ está asociados a f. De modo similar definimos φ_2.

Usando la parte (a)

$$\int_{\Omega_1} \varphi_1 d\mu = \int_{\Omega_1\times\Omega_2} f^+ d(\mu\times\lambda) \leq \int |f| < \infty$$

$$\int_{\Omega_1} \varphi_2 d\mu = \int_{\Omega_1\times\Omega_2} f^- d(\mu\times\lambda) \leq \int |f| < \infty$$

Como la función φ_1 es no negativas, se tiene que φ_1 es μ-integrables. Más aún,

$$\int_{\Omega_1} \varphi_1(x) d\mu(x) < \infty$$

lo que implica que $\varphi_1 x) < \infty$ para μ- c.t.p. $x \in \Omega_1$. Pero $\varphi_1(x) = \int_{\Omega_2} f_x^+(y)d\lambda(y)$ es decir f_x^+ es λ-integrable en los mismos x donde $\varphi(x)$ es finita. Un razonamiento análogo demuestra que $(f^y)^+$ es μ-integrable en los y donde $\varphi_2(y)$ es finito, esto es λ- c.t.p. $y \in \Omega_2$.

Como $f_x = (f^+)_x - (f^-)_x$ y $|f_x| = (f^+)_x + (f^-)_x$ tendremos que f_x es λ-integrable para los x donde tanto $\varphi_1(x)$ como $\varphi_2(x)$ son finitos. Lo que sucede μ- c.t.p. $x \in \Omega_1$, pues φ_1 y φ_2 son integrables. Observe también que $\varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi(x)$ lo que implica que φ es μ-integrable.

Una vez comprobados estos hechos para φ, la mitad de la ecuación 5.4 ya está probada

$$\int_{\Omega_1} \varphi d\mu = \int_{\Omega_1\times\Omega_2} f d(\mu\times\lambda)$$

La otra mitad sigue de un razonamiento análogo al anterior para la función ψ, concluyendo la prueba de la parte (b). □

Observe que la ecuación 5.4 también se escribe en la forma

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_1} d\mu(x)\left(\int_{\Omega_2} f(x,y)d\lambda(y)\right) &= \int_{\Omega_1\times\Omega_2} f d(\mu\times\lambda) = \\ &= \int_{\Omega_2} d\lambda \left(\int_{\Omega_1} f(x,y)d\mu(x)\right),\end{aligned}$$

que es una forma un poco más familiar del Teorema de Fubini.

Ejercicios

5.1 Sean $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ dos espacios medibles. SI $A_j \in \mathcal{A}_1$ y $B_j \in \mathcal{A}_2$ para $j = 1, \ldots, n$, entonces el conjunto

$$\bigcup_{j=1}^{n} (A_j, \times B_j)$$

puede ser escrito como unión disjunta de una cantida finita de rectángulos en $\Omega_1 \times \Omega_2$.

5.2 Sea $A_j \subset \Omega_1$ y $B_j \subset \Omega_2$, $j = 1, 2$. entonces

$$(A_1 \times B_1) \setminus (A_2 \times B_2) = [(A_1 \cap A_2) \times (B_1 \setminus B_2)] \cup [(A_1 \setminus A_2) \times B_1]$$

y también

$$(A_1 \times B_1) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2).$$

5.3 Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, medible con respecto a la medida de Lebesgue, entonces la función $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $F(x, y) = f(x - y)$ también es medible.

5.4 Considere $\Omega_1 = \Omega_2 = [0, 1]$, y en ambos espacios la σ-álgebra de los Lebesgue medibles. Sea μ la medida de de Lebesgue en el intervalo (para Ω_1) y ν la medida de conteo en Ω_2. Si $D = \{(x, y) \ : \ x = y\}$, muestre que D es medible con respecto a la σ-álgebra producto, pero que

$$\int \mu(D_x) d\mu(x) \neq \int \mu(D^y) d\nu(y) \, .$$

5.5 Si $a_{nm} \geq 0$ para $m, n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} \qquad (\leq \infty).$$

5.6 Sea a_{mn} definida para $m, n \in \mathbb{N}$ del siguiente modo: $a_{nn} = 1$, $a_{n,n+1} = -1$, y $a_{mn} = 0$ si $m \neq n$ o $m \neq n + 1$. Muestre que

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = 0 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} = 1.$$

Apéndice A

De Abiertos, Cerrados y Aproximación de Conjuntos Medibles

Aquí trataremos de dar una idea de cuán grande puede ser la colección de los conjuntos medibles según Lebesgue (véase Capítulo 1) a través de teoremas de aproximación de conjuntos. La proximidad de dos conjuntos será establecida por la medida de la diferencia entre ellos.

Lema A.0.1 *Todo conjunto abierto de $\mathbb{R}$ es la unión de una colección contable de intervalos abiertos.*

Demostración. Es claro que el conjunto $\mathbb{Q}$ de los racionales es numerable, y escoja $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una enumeración de $\mathbb{Q}$. Si $G \subset \mathbb{R}$ es abierto, para todo $z \in G \cap \mathbb{Q}$ considere el intervalo $C(z, \frac{1}{n_z})$ con centro z y de tamaño $\frac{1}{n_z}$, donde n_z es el menos natural tal que $C(z, \frac{1}{n_z}) \subset G$.

Considere el conjunto $G_0 = \bigcup_{z\in G\cap\mathbb{Q}} C(z, \frac{1}{n_z})$ de modo que G_0 es abierto y también $G_0 \subset G$.

Por lo tanto para probar el lema solo falta mostrar que $G \subset G_0$.

En efecto, sea $y \in G$ y como G es abierto, existe $C(y, \frac{1}{n_z})$, tal que $C(y, \frac{1}{n_z}) \subset G$ para algún n_z suficientemente grande. Considere el cubo

$C(y, \frac{1}{2n_z})$, con la mitad del radio que el anterior. Como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ existen infinitos puntos racionales en $G \cap C(y, \frac{1}{2n_z})$. Sea ω el primero (considerando el orden de la enumeración de $\mathbb{Q}$). Luego

$\omega \in G \cap C(y, \frac{1}{2n_z})$ lo que implica que $C(\omega, \frac{1}{2n_z}) \subset C(y, \frac{1}{n_z})$ y además

$$y \in C(\omega, \frac{1}{n_z}) \subset C(\omega, \frac{1}{n_\omega}) \subset G_0$$

lo que implica que $G \subset G_0$ y el lema esta probado. □

Teorema A.0.2 *Todo abierto y todo cerrado de* $\mathbb{R}$ *es Lebesgue medible.*

Demostración. Todo abierto es medible pues es unión numerable de intervalos abiertos, que son medibles. Todo cerrado es complemento de abiertos y por lo tanto medible. □

Un subconjunto $E \subset \mathbb{R}$ con $m^*(E) = 0$ se llama conjunto con `medida (de Lebesgue) nula` .

Proposición A.0.1 *Si* $Z \subset \mathbb{R}$ *es de medida nula entonces* Z *es medible. Más aún, cualquier subconjunto de* Z *es medible con medida nula.*

Demostración. De la definición de medida exterior y de la definición de conjunto medible. □

Aunque se incline a pensar que los conjuntos con medida nula, o son puntos, o un conjunto numerable, también existen conjuntos no numerables con medida nula. Ejemplo, el conjunto de Cantor tercios (vea [5]).

Teorema A.0.3 *Si* $E \subset \mathbb{R}$ *es medible y* $x \in \mathbb{R}$ *entonces la traslación* $x \oplus E$ *es medible con la misma medida, i.e.*

$$m(x \oplus E) = m(E)\,.$$

Demostración. Dados dos conjuntos arbitrarios A y B contenidos en $\mathbb{R}$, y $z \in \mathbb{R}$, se comprueba fácilmente que

$$(z \oplus A) \cap B = z \oplus (A \cap ((-z) \oplus B))\,.$$

y también

$$x \oplus B^c = (x \oplus B)^c \,.$$

Si tenemos x, z con $x = -z$, entonces de la invariancia de m^* resulta

$$m^*((z \oplus A) \cap B) = m^*(A \cap (x \oplus B))\,.$$

Sea E un conjunto medible, usando los resultados anteriores con $B = E$ y $B = E^c$ obtenemos

$$\begin{aligned} m^*(A) &= m^*(z \oplus A) = m^*((z \oplus A) \cap E) + m^*((z \oplus A) \cap E^c) \\ &= m^*(A \cap (x \oplus E)) + m^*(A \cap (x \oplus B^c)) \\ &= m^*(A \cap (x \oplus E)) + m^*(A \cap (x \oplus E)^c). \end{aligned}$$

Las ecuaciones anteriores valen para todo A medible, por lo tanto $x \oplus E$ es medible, y como $m^*(x \oplus E) = m^*(E)$, tenemos que $m(x \oplus E) = m(E)$. $\square$

A.1 Aproximación por Abiertos

Veamos primero que todo subconjunto de $\mathbb{R}$ se puede aproximar por un conjunto que es intersección de abiertos y que tiene la misma medida exterior.

Lema A.1.1 (i) *Si $A \subset \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$, entonces existe un abierto $G \subset \mathbb{R}$ tal que $A \subset G$ y $m(G) \leq m^*(A) + \varepsilon$, y por lo tanto $m^*(A) = \inf\{m(G) : A \subset G, G \text{ abierto}\}$.*

(ii) *Si $A \subset \mathbb{R}$, entonces existe un conjunto H que es intersección de abiertos y tal que $A \subset H$ con $m^*(A) = m^*(H)$.*

Demostración. Prueba de (i). Asumimos que $m^*(A) < \infty$, pues el caso contrario es obvio. Entonces, existen celdas I_k abiertas tal que $A \subset \biguplus_{k=1}^{\infty} I_k$, con

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \leq m^*(A) + \varepsilon, .$$

Definimos G como $G = \biguplus_{k=1}^{\infty} I_k$. Vemos que G es abierto y además

$$m(G) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(I_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \leq m^*(A) + \varepsilon\,,$$

que junto con la definición de ínfimo prueba esta parte del lema.

Prueba de (ii). Para cada $n \in \mathbb{N}$ llamamos G_n al abierto obtenido usando la parte (i) del lema con $\varepsilon = 1/n$, es decir

$$m(G_n) \leq m^*(A) + \frac{1}{n}\,.$$

Definimos el conjunto H como

$$H = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$$

de modo que $A \subset H \subset G_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo que implica que

$$m^*(A) \leq m^*(H) \leq m^*(A) + \frac{1}{n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y por lo tanto $m^*(A) = m^*(H)$. □

De aquí es inmediato el siguiente corolario.

Corolario A.1.1 *Todo conjunto de medida nula es una subconjunto de un conjunto que es intersección de abiertos y que tiene medida nula*

Demostración. Si Z es un conjunto de medida nula, entonces existe H tal que $Z \subset H$ tal que $m^*(Z) = m^*(H) = 0$, con H intersección de abiertos por el lema anterior. □

Observe que aun cuando conseguimos para cualquier conjunto A un conjunto H, que sabemos medible, con la misma medida exterior, el conjunto $H \setminus A$ no tiene necesariamente medida pequeña o nula. Este caso se da sólo cuando el conjunto A es medible, como veremos en lo que sigue.

Teorema A.1.1 *Un conjunto E de $\mathbb{R}$ es medible si, y solamente si, para todo $\varepsilon > 0$ existe un abierto G tal que $E \subset G$ y*

$$m^*(G \setminus E) < \varepsilon\,.$$

Demostración. Si E es medible y $m(E) < \infty$, entonces existe G con $E \subset G$ tal que $m(G) < m(E) + \varepsilon$. De la definición de que E es medible también tenemos

$$m(G) = m(G \cap E) + m(G \setminus E) = m(E) + m(G \setminus E)\,,$$

y como $m(E) < \infty$ se tiene $m(G \setminus E) = m(G) - m(E) < \varepsilon$.

Ahora, si $m(E) = \infty$ definimos $E_1 = E \cap \{x : ||x|| \leq 1\}$, $E_n = E \cap \{x : n-1 < ||x|| \leq n\}$, y $E = \bigcup E_n$.

De modo que para todo $n \in \mathbb{N}$ podemos tomar G_n abierto con $E_n \subset G_n$ y tal que $m(G_N \setminus E_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Si definimos $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, tendremos que G es abierto, $E \subset G$ y $G \setminus E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(G_n \setminus E_n)$ y por lo tanto

$$m(G \setminus E) \leq \sum m(G_n \setminus E_n) \leq \sum \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon\,.$$

Supongamos ahora que para todo $\varepsilon > 0$ podemos hallar un abierto G tal que $E \subset G$ y $m^*(G \setminus E) < \varepsilon$, es decir, podemos construir una sucesión de abiertos G_n todos contenidos en E y con $m^*(G_n \setminus E) < \frac{1}{n}$.

Sea $H = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, este conjunto es medible pues es intersección de abiertos. Se tiene también que $H \subset G_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces se cumple que $H \setminus E \subset G_n \setminus E$ y

$$m^*(H \setminus E) \leq m^*(G_n \setminus E) < \frac{1}{n}\,,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, y por lo tanto $m^*(H \setminus E) = 0$, lo que, por la Proposición A.0.1, quiere decir que $H \setminus E$ es medible y entonces $E = H \setminus (H \setminus E)$ es medible. $\square$

Corolario A.1.2 *Si $E \subset \mathbb{R}$ es medible entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un abierto G, que contiene a E, con $m(G) \leq m(E) + \varepsilon$. Más aún, se tiene*

$$m(E) = \inf\{m(G) \;:\; G \textit{ es abierto y } G \supset E\}\,.$$

Demostración. Es claro, hágalo. $\square$

Corolario A.1.3 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *El conjunto $E \subset \mathbb{R}$ es Lebesgue medible.*

(ii) *Existe un conjunto H que es intersección de abiertos, con $E \subset H$ tal que $m^*(H \setminus E) = 0$.*

(iii) *Existe un conjunto H que es intersección de abiertos, y un conjunto Z de medida nula tal que $E \subset H$, $Z \subset H$ y $E = H \setminus Z$.*

A.2 Aproximación por Cerrados

Teorema A.2.1 *Un conjunto $E \subset \mathbb{R}$ es Lebesgue medible si, y solamente si, para cada $\varepsilon > 0$, existe un conjunto F cerrado, con $F \subset E$ y*

$$m^*(E \setminus F) < \varepsilon\,.$$

Demostración. Si E es medible, E^c también lo es. Entonces por el teorema anterior existe un conjunto G abierto tal que $E^c \subset G$ y con $m(G \setminus E^c) < \varepsilon$. Sea $F = G^c$, y por lo tanto F es cerrado, con $F \subset E$, y además $E \setminus F = E \cap G = G \cap (E^c)$, de modo que

$$m(E \setminus F) = m(G \setminus E^c) < \varepsilon\,.$$

Supongamos ahora que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $F_n \subset E$ con $m^*(E \setminus F_n) < \frac{1}{n}$. Sea $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, y por lo tanto es medible pues es unión de cerrados y como $F_n \subset K$ tenemos $E \setminus K \subset E \setminus F_n$, lo que implica

$$m(E \setminus K) \leq m^*(E \setminus F_n) < \frac{1}{n},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, y por lo tanto $m^*(E \setminus K) = 0$, y así el conjunto $E \setminus K$ es medible, con lo que el conjunto $E = K \cup (E \setminus K)$ es medible . $\square$

Corolario A.2.1 *Si $E \subset \mathbb{R}$ es Lebesgue medible, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto F, cerrado, con $F \subset E$, y $m(E) \leq m(F) + \varepsilon$. Más aún,*

$$m(E) = \sup\{m(F) \ : \ F \text{ es cerrado, } F \subset E\}\,.$$

Corolario A.2.2 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *El conjunto $E \subset \mathbb{R}$ es Lebesgue medible.*

(ii) *Existe un conjunto K que es unión de cerrados, con $K \subset E$ tal que $m^*(E \setminus K) = 0$.*

(iii) *Existe un conjunto K que es unión de cerrados, y un conjunto Z de medida nula tal que $K \subset E$, $Z \subset E$ y $E = K \cup Z$.*

A.3 Aproximación por Compactos

Recordamos el hecho básico de que un compacto tiene medida finita pues esta contenido en una intervalo suficientemente grande.

Teorema A.3.1 *Un conjunto* $E \subset \mathbb{R}$ *con* $m^*(E) < \infty$ *es Lebesgue medible si, y solamente si, para todo* $\varepsilon > 0$ *existe un conjunto* C*, compacto tal que* $C \subset E$ *y*

$$m^*(E \setminus G) < \varepsilon\,.$$

Demostración. Sea E un conjunto medible. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos E_n el conjunto definido por $E_n = E \cap \{x \,:\, |x| \leq n\}$. Como la sucesión E_n crece monótonamente a E, entonces $m(E_n)$ converge monótonamente a $m(E) \leq \infty$. Luego, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m(E) < m(E_{n_0}) + \frac{\varepsilon}{2}$. Pero como E_{n_0} es medible, existe un cerrado C contenido en E_{n_0} y con $m(E_{n_0} \setminus C) < \varepsilon/2$. De la definición de conjunto medible

$$m(E) = m(E \setminus E_{n_0}) + m(E_{n_0})$$

y como $m(E) < \infty$, tenemos

$$m(E \setminus E_{n_0}) = m(E) - m(E_{n_0}) < \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

y además como $E \setminus C = E \setminus E_{n_0} \cup (E_{n_0} \setminus C)$, obtenemos

$$m(E \setminus C) = m(E \setminus E_{n_0}) + m(E_{n_0} \setminus C) = \varepsilon\,,$$

con C cerrado, limitado y por lo tanto compacto en $\mathbb{R}$.

Supongamos ahora que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un conjunto C_n compacto, contenido en E, tal que $m^*(E \setminus C_n) < \frac{1}{n}$. Considere el conjunto C definido como $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$. Entonces C es medible, y $E \setminus C \subset E \setminus C_n$, y así

$$m^*(E \setminus C) \leq m^*(E \setminus C_n) < \frac{1}{n}\,.$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y por lo tanto $m^*(E \setminus C) = 0$, implicando que $E = (E \setminus C) \cup C$ es medible.

A.4 Aproximación por Intervalos

Teorema A.4.1 *Si E es Lebesgue medible con medida finita y $\varepsilon > 0$, entonces existen intervalos abiertos (limitados) $\{I_i\}_{i=1}^n$ tal que si $K = \cup_{i=1}^n I_i$ entonces*

$$m(E \triangle K) < \varepsilon\,.$$

Demostración. Existe un conjunto G abierto que cubre E, i.e. $E \subset G$ con $m(G) \leq m(E) + \frac{\varepsilon}{2}$, y sabemos también que este conjunto abierto es unión de un conjunto numerable de intervalos, es decir $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$.

También existe un compacto $C \subset E$ tal que $m(E \setminus C) < \frac{\varepsilon}{2}$. Como E también esta contenido en G, existe un número finito de $\{I_i\}_{i=1}^n$ que siguen cubriendo C. Defina el conjunto K como $K = \bigcup_{i=1}^n I_i$, de modo que se tiene $c \subset K \subset G$ y $C \subset E \subset G$, y por lo tanto

$$\begin{aligned} m(E \triangle K) &= m(E \setminus K) + m(K \setminus E) \\ &\leq m(E \setminus C) + m(G \setminus E) \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

□

Hacemos notar que el mismo teorema se puede demostrar reemplazando los I_i por intervalos cerrados, semiabiertos, o dos a dos disjuntos, y que los teoremas en este capítulo pueden ser demostrados con poquísimas modificaciones para medidas de Lebesgue y conjuntos en $\mathbb{R}^p$ donde consideramos el σ-álgebra producto.

Bibliografía

[1] Bartle, Robert G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. Jhon Wiley & Sons, Inc. New York (1996).

[2] Fernandez, Pedro J., *Medida e Integração*. Projeto Euclides IMPA 2^a Edición. Rio de Janeiro (1996).

[3] Frid Neto, Hermano, *Introdução à Integral de Lebesgue*. Monografías del IMCA 5. Lima (1999).

[4] Gatica, Juan A., *Introducción a la Integral de Lebesgue en la Recta*. O.E.A. (1997).

[5] Lima, Elon L., *Análisis Real Vol. 1*. Textos del IMCA 1, Lima (1997).

[6] Lima, Elon L., *Curso de Análise Vol. 2*. Projeto Euclides IMPA 4^a Edición. Rio (1995).

[7] Metzger, Roger J., *Teoría de la Medida en* $\mathbb{R}$. XX Coloquio de la Sociedad Matemática Peruana, SMP, 2002.

[8] Rudin, Walter, *Real and Complex Analysis*. Mc. Graw-Hill. Singapore (1987).